2022 年度秋学期　応用数学（解析）　第６回

第２部・基本的な微分方程式／　変数分離形の変形

前回は，変数分離形の微分方程式と，それを積分によって解く方法を説明しました。このように，常微分方程式の解を積分によって求める方法を**求積法**といいます。今回は，式変形によって変数分離形に帰着し，求積法で解ける形の方程式を紹介します。

同次形の微分方程式

関数 $x(t)$ についての**同次形**の微分方程式とは，次の形のものをいいます。

$$\frac{dx}{dt} = f(\frac{x}{t}). \tag{1}$$

この方程式は，$\dfrac{x}{t} = u$ とおくと $x = ut$ ですから，$\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$ となり，

$$\begin{aligned} t\frac{du}{dt} + u &= f(u) \\ \frac{1}{f(u) - u}du &= \frac{1}{t}dt \end{aligned} \tag{2}$$

と変数分離形に変形できます。

ところで，関数 $M(x,t)$ が $M(ut,t) = t^k M(u,1)$ となるとき，関数 M は k 次の**同次関数**であるといいます。関数 $x(t)$ についての微分方程式が $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{M(x,t)}{N(x,t)}$ と表される時，もしも M, N が同じ k 次の同次関数なら，$x = ut$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{M(x,t)}{N(x,t)} \\ &= \frac{t^k M(u,1)}{t^k N(u,1)} = \frac{M(u,1)}{N(u,1)} = \frac{M(\frac{x}{t},1)}{N(\frac{x}{t},1)} \end{aligned} \tag{3}$$

となり，(1) 式の形になります。同次形という名前はここからきています。

例題

関数 $x(t)$ についての微分方程式 $x' = \dfrac{t-x}{t+x}$ の一般解を求めてください。

（解答）右辺の分母分子を t で割ると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 - \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}} \tag{4}$$

となりますから，この方程式は同次形です。そこで $\dfrac{x}{t} = u$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$ となり，与えられた方程式は

$$\begin{aligned} t\frac{du}{dt} + u &= \frac{1-u}{1+u} \\ \frac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u}du &= \frac{1}{t}dt \\ \frac{u+1}{u^2+2u-1}du &= -\frac{1}{t}dt \end{aligned} \tag{5}$$

という変数分離形になります。ここで $\dfrac{d}{du}(u^2+2u-1)=2(u+1)$ ですから，(5) 式の両辺を積分すると，C を積分定数として

$$\frac{1}{2}\log(|u^2+2u-1|)=-\log|t|+C \tag{6}$$

となります。よって，別の定数 A を使って

$$\begin{aligned}\log(|u^2+2u-1|)&=\log(A|t|^{-2})\\ t^2(u^2+2u-1)&=A\end{aligned} \tag{7}$$

とあらわすことができます[1]。$u=\dfrac{x}{t}$ ですからこれを代入すると，この方程式の解は $x^2+2tx-t^2=A$ となります。■

---

1 階線形微分方程式

関数 $x(t)$ についての 1 階微分方程式が

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t) \tag{8}$$

の形に書けるとき，この方程式を **1 階線形微分方程式**といいます。

この方程式は，$p(t)=\exp\left(\int P(t)dt\right)$ とおくと，$(p(t)x)'$ が

$$\begin{aligned}(p(t)x)'&=(p(t))'x+p(t)x'\\ &=\left[\exp\left(\int P(t)dt\right)\right]'x+p(t)x'\\ &=p(t)P(t)x+p(t)x'\\ &=p(t)\left\{P(t)x+x'\right\}=p(t)Q(t)\end{aligned} \tag{9}$$

となることから，C を積分定数として

$$\begin{aligned}p(t)x&=\int p(t)Q(t)dt+C\\ x&=\frac{1}{p(t)}\left(\int p(t)Q(t)dt+C\right)\end{aligned} \tag{10}$$

と解くことができます。

例題

関数 $x(t)$ についての微分方程式 $x'+x=t$ の一般解を求めてください。

（解答）この方程式は 1 階線形微分方程式で，(8) 式にあてはめると $P(t)\equiv 1$, $Q(t)=t$ です。よって $p(t)=\exp\left(\int 1dt\right)=e^{t+C_1}=e^{C_1}e^t$ で（C_1 は定数），定数を $e^{C_1}=C_2$ と書き換えると $p(t)=C_2e^t$ となります。したがって，一般解は (10) 式から，C_3 を定数として

$$C_2e^tx=\int C_2e^ttdt+C_3 \tag{11}$$

[1]定数には適宜 ± をつけてよいので，絶対値が外れることに注意してください。

となり，定数を $\dfrac{C_3}{C_2} = C$ と置き換えると $e^t x = \int e^t t dt + C$ となります。そこで，部分積分を使って

$$
\begin{aligned}
e^t x &= \int e^t t dt + C \\
&= e^t t - \int e^t dt + C \\
&= e^t t - e^t + C \\
x &= t - 1 + Ce^{-t}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

と求められます。■

ところで，$n \neq 0, n \neq 1$ とするとき，関数 $x(t)$ についての

$$
\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n \tag{13}
$$

の形の方程式を **Bernoulli（ベルヌーイ）の微分方程式**といいます。

この方程式は，$u = x^{1-n}$ とおくと 1 階線形微分方程式に変換することができます。(13) 式から

$$
\frac{1}{x}x' + P(t) = Q(t)x^{n-1} \tag{14}
$$

となります。一方，$u = x^{1-n}$ の両辺の対数をとると $\log u = (1-n)\log x$ で，その両辺をそれぞれ t で微分すると

$$
\frac{u'}{u} = (1-n)\frac{x'}{x} \tag{15}
$$

となります。(15) 式を (14) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-n}\frac{u'}{u} + P(t) &= Q(t)\frac{1}{u} \\
u' + (1-n)P(t)u &= (1-n)Q(t)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

となって，$u(t)$ の 1 階線形微分方程式となります。

例題

関数 $x(t)$ についての微分方程式 $x' + tx = tx^2$ が，1 階線形微分方程式で表されることを示してください。

（解答）$u = x^{-1}$ とおき，両辺の対数をとると $\log u = -\log x$ で，その両辺を t で微分すると

$$
\frac{u'}{u} = -\frac{x'}{x} \tag{17}
$$

となります。

一方，元の方程式の両辺を x で割ると

$$
\frac{x'}{x} + t = tx \tag{18}
$$

で，これに (17) 式と $u = x^{-1}$ を代入すると

$$-\frac{u'}{u} + t = \frac{t}{u} \tag{19}$$

となります。さらに両辺を $(-u)$ 倍すると $u' - tu = -t$ となって，u についての 1 階線形微分方程式となります。

問題

関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を解いて，一般解を求めてください。

1. $x' = \dfrac{x-t}{2t}$
2. $tx' - x = 1$
3. $x' + x = tx^2$

参考文献

水野克彦編，基礎課程　解析学，学術図書，1985. ISBN978-4-8736-11075
水田義弘，詳解演習　微分積分，サイエンス社，1998. ISBN4-7819-0891-8