2022年度秋学期　応用数学（解析）　第6回演習の解答例

1. 与式の右辺の分母分子を t で割ると $x' = \dfrac{\frac{x}{t}-1}{2}$ となるので，同次形の微分方程式です。よって $\dfrac{x}{t} = u$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = t\frac{du}{dt} + u &= \frac{u-1}{2} \\ t\frac{du}{dt} &= -\frac{u+1}{2} \\ \frac{du}{u+1} &= -\frac{dt}{2t} \\ \int \frac{du}{u+1} &= -\int \frac{dt}{2t} \\ \log|u+1| &= -\frac{1}{2}\log|t| + C \ (C\text{ は定数}) \\ u+1 &= \pm e^C |t|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{A1}$$

よって，$\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと，$u = -1 + A\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$ が得られます。ここで $u = \dfrac{x}{t}$ を代入すると，一般解は $x = -t + A\sqrt{|t|}$ となります。■

2. 与式より $x' - \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{t}$ と変形でき，これを1階線型微分方程式の一般形 $x' + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると $P(t) = -\dfrac{1}{t}, Q(t) = \dfrac{1}{t}$ となります。よって，C_1, C_2 を定数として

$$\begin{aligned} p(t) &= \exp(-\int \frac{1}{t}dt) \\ &= \exp(-\log t + C_1) \\ &= \exp(\log t^{-1}) + C_1) \\ &= \exp(\log t^{-1})\exp(C_1) \\ &= C_2\frac{1}{t} \end{aligned} \tag{A2}$$

となります。したがって，一般解は C を定数として

$$\begin{aligned} C_2\frac{1}{t}x &= \int C_2\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}dt \\ \frac{1}{t}x &= \int \frac{1}{t^2}dt \\ \frac{1}{t}x &= -\frac{1}{t} + C \\ x &= -1 + Ct \end{aligned} \tag{A3}$$

となります。■

3. 与式は Berunoulli の微分方程式で，その一般形 $x' + P(t)x = Q(t)x^n$ にあてはめると $P(t) \equiv 1,\ Q(t) = t,\ n = 2$ です。したがって，$u = \dfrac{1}{x}$ とおくと，$u' - u = -t$ と変形できます。この方程

式は 1 階線形微分方程式で，$p(t) = \exp(\int(-1)dt) = e^{-t}$ とおくと，$(p(t)u)' = p(t)(-t)$ がなりたつことから

$$\begin{aligned}
(e^{-t}u)' &= -te^{-t} \\
e^{-t}u &= -\int te^{-t}dt \\
e^{-t}u &= -\left[-te^{-t} + \int e^{-t}dt\right] \\
e^{-t}u &= te^{-t} + e^{-t} + C \ (C \text{ は定数})
\end{aligned} \tag{A4}$$

よって $u = t + 1 + Ce^t$ で，$u = \dfrac{1}{x}$ ですから一般解は $x = \dfrac{1}{t+1+Ce^t}$ となります。■