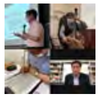
2022年度秋学期 応用数学(解析)　第7回

第2部・基本的な微分方程式 **2階線形微分方程式(1)**

浅野 晃
関西大学総合情報学部



2階線形微分方程式とは🤔

2階線形微分方程式

一般には $x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$

ここが恒等的に0なのが[斉次]
そうではないのが[非斉次]

一番簡単なのは $x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次方程式

とりあえず，$x \equiv 0$ は解[自明解]

それ以外には？

2階線形微分方程式の解

とりあえず $x'' + ax' + bx = 0$ に $x(t) = e^{\lambda t}$ を代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$

$$\underline{\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)} e^{\lambda t} = 0$$

ここが 0 になるような λ については
$x = e^{\lambda t}$ は解，その定数倍も解

λ の2次方程式だから，みたす λ はたいてい2つ λ_1, λ_2

一般解は $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ 　$x \equiv 0$ を含む

おわり😪

こんなんでいいのか？🌀

本当に一般解であるためには

$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ が本当に一般解であることは，
以下の2項目が正しいことと同じ

1. 解が一意
   初期値 $\underbrace{x(t_0), x'(t_0)}_{\text{初期値はこの2つ}}$ を定めると，特殊解はひとつに定まる

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる
   1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば，
   一般解は $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ で表される

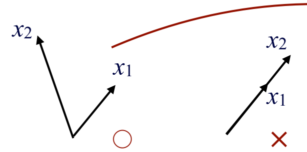
本当に一般解であるためには

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば，
一般解は $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ で表される

2つの関数が1次独立とは

$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) = 0$ がどんな t についても
なりたつのは，$C_1 = C_2 = 0$ のときだけ



解全体は
2次元ベクトル空間をなす

本当に一般解であるためには

1. 解が一意
2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

さっきの例では

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ は $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら1次独立

一般解は $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ だけで，他にはない

一般の斉次形 n 階線形微分方程式
（定数係数でない場合も含む）についてなりたつ

定数係数の場合に，証明してみる

行列で表現する

$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$ を，$x_1 = x, x_2 = x'$ とおいて

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t) \end{aligned}$$ と表す

行列で $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

1階線形微分方程式の形になる
何階線形微分方程式でも，この形にできる

条件1の証明の概略

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると，特殊解はひとつに定まる

リプシッツ条件をつかう

特異解と解の一意性

初期値がひとつ定まったときに，解がひとつだけに決まることを，
解が一意（unique）であるという

一意性の十分条件のひとつ「リプシッツ条件」

微分方程式が $x'(t) = f(t, x)$ のとき，初期値のまわりでどんな x_1, x_2 についても

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqq L|x_1 - x_2|$$

となる定数 L があるなら，その初期値について一意

x のわずかな変化について，
f がいくらでも大きく変化する，ということはない

条件1の証明の概略

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると，特殊解はひとつに定まる

リプシッツ条件をつかう

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ の右辺について，関数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を考えると

$\| (A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)) - (A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)) \| = \|A(t)\boldsymbol{x} - A(t)\boldsymbol{y}\|$ であり，

$\|A(t)\boldsymbol{x} - A(t)\boldsymbol{y}\| \leqq \|A(t)\| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ となるようなノルムが存在する

ユークリッドノルムならそうなる

ノルムが連続なら，任意の有界閉区間で上限が存在する

リプシッツ条件が成り立ち，一意

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば，
一般解は $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ で表される

斉次形の場合を考える $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$

テキストは n 階の場合を示しているが，
ここでは2階の場合を示す

まず，

一般解を $\boldsymbol{x}(t)$ とするとき

$t = t_0$ のときの初期値は $\boldsymbol{x}(t_0) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ の形で表せる

$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ は，2次元の基本ベクトル

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の特殊解を，2つ考える

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_1$ をみたすもの $\xi_1(t)$

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_2$ をみたすもの $\xi_2(t)$

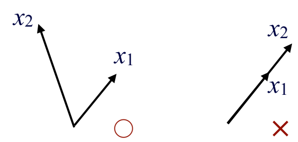
$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$
は，2次元の基本ベクトル

この特殊解 $\xi_1(t), \xi_2(t)$ は，1次独立。本当？

2つの関数が1次独立とは

2つの関数が1次独立とは

$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) = 0$ がどんな t についても
なりたつのは，$C_1 = C_2 = 0$ のときだけ



条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

$x' = A(t)x$ の特殊解を，2つ考える

初期値 $x(t_0) = e_1$ をみたすもの $\xi_1(t)$

初期値 $x(t_0) = e_2$ をみたすもの $\xi_2(t)$

$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ は，2次元の基本ベクトル

この特殊解 $\xi_1(t), \xi_2(t)$ は，1次独立である 👌

$\because\ c_1\xi_1(t) + c_2\xi_2(t) = \mathbf{0}$ が任意の t についてなりたつとする

$t = t_0$ のときも当然なりたつ

$c_1\xi_1(t_0) + c_2\xi_2(t_0) = \mathbf{0}$

$c_1 e_1 + c_2 e_2 = \mathbf{0}$ ← これがなりたつのは $c_1 = c_2 = 0$ に限る

e_1, e_2 は1次独立だから

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

初期値 $x(t_0) = e_1$ をみたす $\xi_1(t)$

初期値 $x(t_0) = e_2$ をみたす $\xi_2(t)$

一般解を $x(t)$ とするとき

$t = t_0$ のときの初期値は $x(t_0) = x_1e_1 + x_2e_2$ の形で表せる

特殊解の1次結合 $x_1\xi_1(t) + x_2\xi_2(t)$ を考えると

$t = t_0$ のとき $x_1e_1 + x_2e_2$

- 一般解で表された $x(t)$
- 特殊解の1次結合 $x_1\xi_1(t) + x_2\xi_2(t)$

どちらも同じ初期値をもつ

一意だから，それらは同じ解である

$x(t) = x_1\xi_1(t) + x_2\xi_2(t)$

定数係数の 斉次形2階線形微分方程式を解く💡

2階線形微分方程式を解く

$x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次形2階線形微分方程式

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ をみたす λ について $x = e^{\lambda t}$ は解

特性方程式という

特性方程式の解の形によって，3パターン

異なる2つの実数解の場合

異なる2つの虚数解の場合

重解の場合

実数解が2つの場合

特性方程式の
異なる2つの実数解 λ_1, λ_2

微分方程式の
1次独立な解 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

一般解は $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

（つまり，最初のとおり）

虚数解が2つの場合

一般解は $x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$

さらに計算すると

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}\right) \\ &= e^{\alpha t}\left(C_1(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + C_2(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))\right) \\ &= e^{\alpha t}\left((C_1 + C_2)\cos(\beta t) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta t)\right) \end{aligned}$$

なぜ三角関数になるのかは，
また先で

定数を置き直して，一般解は

$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$ 振動を表している これも先で

重解の場合

ふつうにやると，微分方程式の解は $C_1 e^{\lambda_1 t}$ しか出て来ない

これと1次独立なもうひとつの解は $te^{\lambda_1 t}$

確かめるため，解を微分して，微分方程式に代入してみる

$$(te^{\lambda_1 t})' = \lambda_1 te^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t}$$

$$(te^{\lambda_1 t})'' = \lambda_1(\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t}$$

微分方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} &(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 te^{\lambda_1 t} + bte^{\lambda_1 t} \\ &= \{\underline{\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b}\}te^{\lambda_1 t} + \underline{(2\lambda_1 + a)}e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

λ_1は特性方程式の解
だから0

特性方程式の
解と係数の関係により0

一般解は
$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 te^{\lambda_1 t}$

見つけ方はテキストで（定数変化法）

例題

例題

$x'' - 5x' + 6x = 0$ を解いて，

初期値 $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$ での特殊解を求めよ。

特性方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ その解は $\lambda = 2, 3$

異なる2つの実数解なので，微分方程式の一般解は

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

初期条件から

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$
$$x'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 0$$
$$\downarrow$$
$$C_1 = 3, C_2 = -2$$

よって，求める特殊解は

$$x(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}$$

今日のまとめ

定数係数・斉次形の
2階線形微分方程式 $x'' + ax' + bx = 0$

次回は非斉次形
（右辺が0でない）をやります