

1. 特殊解を求めるため, $x = at^2 + bt + c$ と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned} 2a + (2at + b) - 2(at^2 + bt + c) &= t + 1 \\ -2at^2 + 2(a - b)t + (2a + b - 2c) &= 0 \end{aligned} \tag{A1}$$

が得られます。これが t によらずなりたつので,

$$\begin{cases} -2a &= 0 \\ 2(a - b) &= 1 \\ 2a + b - 2c &= 1 \end{cases} \tag{A2}$$

がなりたち, これを解くと $a = 0, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{3}{4}$ となります。

一方, 対応する斉次形の方程式は $x'' + x' - 2x = 0$ で, 特性方程式は $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ となり, その解は $\lambda = 1, -2$ です。よって, 斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$ (C_1, C_2 は任意の定数) となります。

以上から, 与方程式の一般解は $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$ となります。■

2. 特殊解を求めるため, $x = ae^t$ と見当をつけて与式に代入すると

$$ae^t + 2ae^t + ae^t = e^t \tag{A3}$$

が得られます。これが t によらずなりたつので $a = \frac{1}{4}$ となります。

一方, 対応する斉次形の方程式は $x'' + 2x' + x = 0$ で, 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ となり, その解は $\lambda = -1$ (重解) です。よって, 斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$ (C_1, C_2 は任意の定数) となります。

以上から, 与方程式の一般解は $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + \frac{1}{4}e^t$ となります。■

3. 特殊解を求めるため, $x = A \cos 2t + B \sin 2t$ と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned} (-4A \cos 2t - 4B \sin 2t) + (A \cos 2t + B \sin 2t) &= \cos 2t \\ (-4A + A - 1) \cos 2t + (-4B + B) \sin 2t &= 0 \end{aligned} \tag{A4}$$

が得られます。これが t によらずなりたつので $A = -\frac{1}{3}, B = 0$ となります。

一方, 対応する斉次形の方程式は $x'' + x = 0$ で, 特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$ となり, その解は $\lambda = \pm i$ です。よって, 斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (C_1, C_2 は任意の定数) となります。

以上から, 与方程式の一般解は $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{3} \cos 2t$ となります。■

(注) この問題では, 左辺に 1 階微分 x' の項がありません。 \cos の 2 階微分はやはり \cos なので, はじめから $x = A \cos 2t$ と見当をつけて, もう少し簡単な式で解くこともできます。