

## 演習問題

---

過去の試験問題から選んだものです。参考文献からとった問題もあります。

### 実数の定義・数列の収束に関して

次の各問に答えよ。

1. 「可算無限」とは何かを説明せよ。
2. 数の「稠密性」と「連続性」の違いを説明せよ。
3. 実数の連続性の定義をひとつあげよ。
4. 数列  $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  は  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束することを、 $\varepsilon - N$  論法で示せ。

### 微分方程式について

関数  $x(t)$  についての次の微分方程式を解け。ただし、初期値が指定されている場合はその初期値を満たす特殊解を、そうでない場合は一般解を求めよ。

1.  $x' = \frac{2tx}{t^2 - x^2}$
2.  $tx' - x = x^{\frac{2}{3}}$
3.  $x'' + 2x' + x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$
4.  $x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 2t - 3, x(0) = x'(0) = 0$
5.  $x'' + x = \cos 2t, x(0) = x'(0) = 0$

### 参考文献

水田義弘, 詳解演習 微分積分, サイエンス社, 1998. ISBN4-7819-0891-8

## 解答例

### 実数の定義・数列の収束に関して

1. (講義第2回参照)
2. (講義第3回参照)
3. (講義第3回・第4回であげた4つの定義のうち、ひとつを答えてください。)
4. どんな  $\varepsilon$  に対しても、 $N = (\frac{1}{\varepsilon}$ 以上の最小の整数) とおくと、 $|a_N| \leq \varepsilon$  となる。よって、 $n > N$  のとき  $|a_n - 0| < \varepsilon$  となり、 $\varepsilon - N$  論法による収束の定義により  $n \rightarrow \infty$  のとき  $a_n \rightarrow 0$  となる。■

### 微分方程式について

1. 与式の右辺の分母分子を  $t^2$  で割ると  $x' = \frac{2(\frac{x}{t})}{1 - (\frac{x}{t})^2}$  となるので、同次形の微分方程式である。よって  $\frac{x}{t} = u$  とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= t \frac{du}{dt} + u = \frac{2u}{1-u^2} \\ t \frac{du}{dt} &= \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2} \\ \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} du &= \frac{1}{t} dt\end{aligned}\tag{1}$$

$$\int \left( \frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2} \right) du = \int \frac{1}{t} dt$$

$$\log |u| - \log |1+u^2| = \log |t| + C \quad (C \text{ は定数})$$

となり、 $\frac{u}{1+u^2} = \pm e^C t$  となる。よって、 $\pm e^C$  をあらためて定数  $A$  とおくと、 $\frac{u}{1+u^2} = At$  が得られる。ここで  $u = \frac{x}{t}$  を代入すると、 $\frac{x}{t} = At \left( 1 + \left( \frac{x}{t} \right)^2 \right)$  より一般解は  $x = A(t^2 + x^2)$  となる。■

2. 与式は Bernoulli の微分方程式で、その一般形  $x' + P(t)x = Q(t)x^n$  にあてはめると  $P(t) = -\frac{1}{t}$ 、 $Q(t) = \frac{1}{t}$ 、 $n = \frac{2}{3}$  である。したがって、 $u = x^{1-\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$  とおくと、 $u' + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{t} \right) u = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t}$  すなわち  $u' + \frac{-1}{3t} u = \frac{1}{3t}$  と変形できる。この方程式は1階線形微分方程式で、 $p(t) = \exp \left( \int \frac{-1}{3t} dt \right)$  とおくと  $p(t) = \exp \left( -\frac{1}{3} \log t \right) = t^{-\frac{1}{3}}$  であり、また  $(p(t)u)' = p(t) \left( \frac{1}{3t} \right)$  がなりたつことから

$$\begin{aligned}(t^{-\frac{1}{3}}u)' &= t^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{3t} \\ t^{-\frac{1}{3}}u &= \frac{1}{3} \int t^{-\frac{4}{3}} dt \\ t^{-\frac{1}{3}}u &= -t^{-\frac{1}{3}} + C \quad (C \text{ は定数})\end{aligned}\tag{2}$$

よって  $u = -1 + Ct^{\frac{1}{3}}$  である。 $u = x^{\frac{1}{3}}$  だったので、一般解は  $x = \left( -1 + Ct^{\frac{1}{3}} \right)^3$  となる。■

3. この方程式は斉次形2階線形微分方程式で、特性方程式は  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$  と表せる。この特性方程式は  $(\lambda + 1)^2 = 0$  と変形できて、重解  $\lambda = -1$  をもつ。よって、微分方程式の一般解は、 $C_1, C_2$  を定数として  $x = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$  である。

初期値  $x(0) = 0$  であるから、一般解に  $t = 0$  を代入して  $x = 0$  とおくと、 $C_1 = 0$  が得られる。また、 $x' = -C_1e^{-t} + C_2(e^{-t} - te^{-t})$  であり、初期値  $x'(0) = 1$  であるから、 $x'$  の式に  $t = 0, C_1 = 0$  を代入して  $x = 1$  とおくと、 $x'(0) = C_2(1 - 0) = 1$  より  $C_2 = 1$  が得られる。よって、求める特殊解は  $x = te^{-t}$  である。

4. まず与えられた方程式の特殊解を求めるため、 $x = at^2 + bt + c$  と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned} 2a + 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) &= 3t^2 + 2t - 3 \\ -3at^2 + (4a - 3b)t + (2a + 2b - 3c) &= 3t^2 + 2t - 3 \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。これが  $t$  によらずなりたつので、

$$\begin{cases} -3a &= 3 \\ 4a - 3b &= 2 \\ 2a + 2b - 3c &= -3 \end{cases} \quad (4)$$

がなりたち、これを解くと  $a = -1, b = -2, c = -1$  となる。

一方、対応する斉次形の方程式は  $x'' + 2x' - 3x = 0$  で、特性方程式は  $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$  であり、その解は  $\lambda = 1, -3$  である。よって、斉次形の方程式の一般解は  $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t}$  ( $C_1, C_2$  は任意の定数) となる。

以上から、与方程式の一般解は  $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t} - t^2 - 2t - 1$  となる。

問題での初期値は、 $t = 0$  のとき  $x(0) = x'(0) = 0$  となっているので、一般解に代入すると  $x(0) = C_1 + C_2 - 1 = 0, x'(0) = C_1 - 3C_2 - 2 = 0$  となる。これらから  $C_1 = \frac{5}{4}, C_2 = -\frac{1}{4}$  となるので、求める特殊解は  $x(t) = \frac{5}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-3t} - t^2 - 2t - 1$  である。■

5. 特殊解を求めるため、 $x = A \cos 2t + B \sin 2t$  と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned} (-4A \cos 2t - 4B \sin 2t) + (A \cos 2t + B \sin 2t) &= \cos 2t \\ (-4A + A - 1) \cos 2t + (-4B + B) \sin 2t &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。これが  $t$  によらずなりたつので、 $A = -\frac{1}{3}, B = 0$  となる。

一方、対応する斉次形の方程式は  $x'' + x = 0$  で、特性方程式は  $\lambda^2 + 1 = 0$  となり、その解は  $\lambda = \pm i$  である。よって、斉次形の方程式の一般解は  $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$  ( $C_1, C_2$  は任意の定数) となる。

以上から、与方程式の一般解は  $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{3} \cos 2t$  となる。問題での初期値は、 $t = 0$  のとき  $x(0) = x'(0) = 0$  となっているので、一般解に代入すると  $x(0) = C_1 - \frac{1}{3} = 0, x'(0) = C_2 = 0$  となる。これらから  $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = 0$  となるので、求める特殊解は  $x(t) = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t$  である。■