

今日は、「振動」を扱う微分方程式💡

振動とは

ある方向に進めば進むほど、
逆向きに進もうとする力が働く

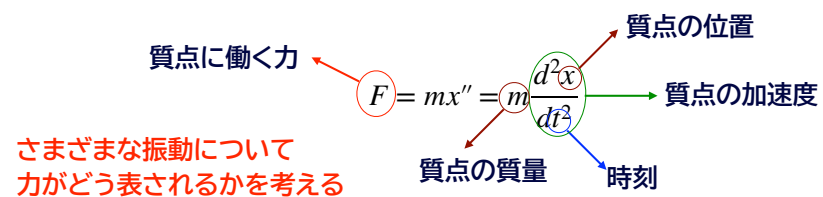
ときにおきる運動

釣り合い位置から両方に往復を繰り返す

質点の運動方程式

質点 = 質量はあるが大きさはない点
大きさが無いので、物体自身の回転などは考えなくてよい

ニュートンの運動方程式



単振動

5

単振動

もっとも単純な振動, 復元力(下記)のみが働く

釣り合い位置にもどろうとする力[復元力]

原点を釣り合い位置とし, そこからの距離に比例する復元力が働くとする

$$F = -kx$$

正の定数 位置

釣り合い位置からの方向の逆向きの力なのでマイナス

2022年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 6 | 22

単振動の運動方程式

$$F = mx'' \text{ より } mx'' = -kx$$

$F = -kx$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

斉次形の2階線形微分方程式

特性方程式は $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ 虚数解 $\lambda = \pm i\omega_0$

一般解は $x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

2022年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 7 | 22

単振動の運動方程式

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \text{ より } x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

位置 x は実数だから, C_1, C_2 とも実数でなければならない

三角関数を合成すると

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\phi = -\tan^{-1}(C_2/C_1)$

x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動 単振動の式

2022年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 8 | 22

単振動の式

x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

[振幅]

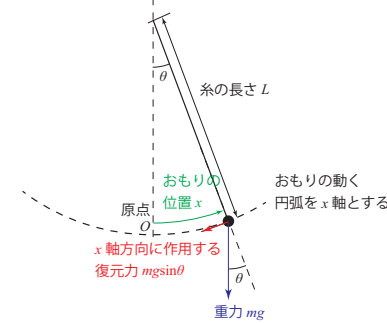
[角振動数(角周波数)]

時間が1秒進むと, $(\omega_0 t + \phi)$ が何ラジアン進むか

1往復とは, 2π ラジアン進むこと それに必要な時間は $2\pi/\omega_0$ [周期]

1秒間に何往復するか? その回数は, 周期の逆数 $\omega_0/2\pi$
[振動数(周波数)]

単振り子は単振動か?



復元力は $-mg \sin \theta$

θ が小さいとき $\sin \theta$ は θ で近似できる

$\theta = x/L$ (ラジアン)なので,

復元力は $-(mg/L)x$

これを k とみれば
単振動

$$\text{周期 } \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad L \text{ と } g \text{ だけで決まる (振り子の等時性)}$$

θ が小さい, つまり振れ幅が小さいときのみ成り立つ

減衰振動

減衰振動

復元力以外に, [抵抗力]がはたらく場合

運動が速いほど, それを妨げる力が働く 空気抵抗など

質点の速度は x' 抵抗力は $-ax'$
逆向きでマイナス 正の定数

運動方程式は

$$mx'' = -kx - ax' \quad \mu = \frac{a}{2m} \text{ とおく [抵抗係数]} \quad x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

減衰振動の運動方程式

$$x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{これも斉次形の2階線形微分方程式}$$

$$\text{特性方程式は } \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \text{解 } \lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

$\mu^2 < \omega_0^2$ の場合を考える 抵抗力が比較的小さい場合

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \quad \text{は虚数解}$$

< 0

$$\text{微分方程式の解 } x = e^{-\mu t} (C_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t))$$

$$\text{三角関数を合成 } x = Ae^{-\mu t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + \phi)$$

振幅が時間とともに小さくなる【減衰振動】

強制振動と共鳴 🤔

強制振動

復元力に加えて、外部から【強制力】がはたらく場合

質点を、角振動数 ω で強制的に振動させる

$$\begin{array}{ll} \text{復元力は } -kx & \text{運動方程式は} \\ \text{強制力は } F \cos \omega t & mx'' = -kx + F \cos \omega t \end{array}$$

$$f = \frac{F}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad \text{これは非斉次形の2階線形微分方程式}$$

強制振動の運動方程式

$$x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

対応する斉次形の微分方程式は $x'' + \omega_0^2 x = 0$ 単振動の式と同じ

$$\text{一般解は } x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

特殊解をひとつ見つける

$$x = C \cos \omega t \quad \text{を入れてみると } C(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t = f \cos \omega t$$

$$\text{よって, } \omega \neq \omega_0 \text{ のとき } C = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\text{非斉次形の一般解は } x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

強制振動

[強制振動]の式 $x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$

強制力のないときの振動
[固有振動]

ω_0 [固有角振動数]

$\omega_0/2\pi$ [固有振動数]

強制振動

強制振動の角振動数 ω が固有角振動数 ω_0 に近づくと
強制振動の項が大きくなる

$\omega = \omega_0$ のときは発散する *

共鳴

$\omega = \omega_0$ のときは強制振動の項が発散する

もう一度もとの方程式に戻る $x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$

$x = t(C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t)$ と見当をつけて、
また右辺も $\omega = \omega_0$ としてそれぞれ代入すると

$$-2C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + 2C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t = f \cos \omega_0 t$$

よって $C_1 = 0, C_2 = \frac{f}{2\omega_0}$

解は $x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{ft}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$

時間がたつと振動しながら発散する [共鳴]

問題

問題

単振動において、

$t = 0$ のとき $x = 0, x' = v$ となるとき、運動方程式の特殊解を求めよ。

単振動の運動方程式の一般解は $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

両辺を t で微分すると $x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

$t = 0$ のとき $x = 0, x' = v$ となるので

$x(0) = A \cos \phi = 0 \longrightarrow A = 0$ だと $x \equiv 0$

$x'(0) = -A\omega_0 \sin \phi = v$ 振動にならない よって $\cos \phi = 0$

問題

一般解 $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ $x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

問題に示された初期値によると

$$x(0) = A \cos \phi = 0 \quad x'(0) = -A\omega_0 \sin \phi = v$$

$\cos \phi = 0$ より $\phi = \frac{\pi}{2}$ にできる このとき $\sin \phi = 1$

つまり $-A\omega_0 = v$ $A = -\frac{v}{\omega_0}$

以上から、求める特殊解は

$$x = -\frac{v}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

今日のまとめ

振動を表す微分方程式

- 単振動
- 減衰振動
- 強制振動

2階線形微分方程式で表され、
それを解くと振動を表す式が得られる