

前回の講義で、

領域  $D$  で正則な関数  $f(z)$  について、経路  $C$  が  $D$  の内部の閉曲線ならば、 $\oint_C f(z)dz = 0$  である。

という「コーシーの積分定理」を説明しました。では、正則でない点、いわば「穴」がある場合はどうなるのでしょうか？ 今回は、閉曲線  $C$  の内側に、関数  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  における  $z=1$  のように、正則でない点がある場合はどうなるか、を考えます。

### $f(z) = z^n$ の積分

今日の問題のような積分を考えるために、関数を級数で表して、各項に対する積分を考えます。その準備として、 $f(z) = z^n$  を、単位円周（複素平面における、原点を中心とする半径 1 の円周）にそって正の向きにまわって積分した時の値を考えます。

$C$  を単位円周とします。まず、 $n = 0, 1, 2, \dots$  の場合は、円周内で  $z^n$  は正則ですから、コーシーの積分定理により  $\oint_C f(z)dz = 0$  です。

一方、 $n = -1, -2, \dots$  のとき、あらためて  $f(z) = \frac{1}{z^n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおきます。このとき、 $z=0$  で  $f(z)$  は正則ではありません。この場合は、単位円周  $C$  を正の向きにまわる  $z$  が  $z = e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) と表されるので、

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

となります。この積分は、 $n=1$  のとき

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad (2)$$

となり、 $n=2, 3, \dots$  のときは

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z^n} dz &= \frac{i}{i(1-n)} \left[ e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{1-n} \left[ e^{2(1-n)\pi i} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

で、 $e^{2(1-n)\pi i} = \cos(2(1-n)\pi) + i \sin(2(1-n)\pi) = 1$  ですから上の積分は 0 です。

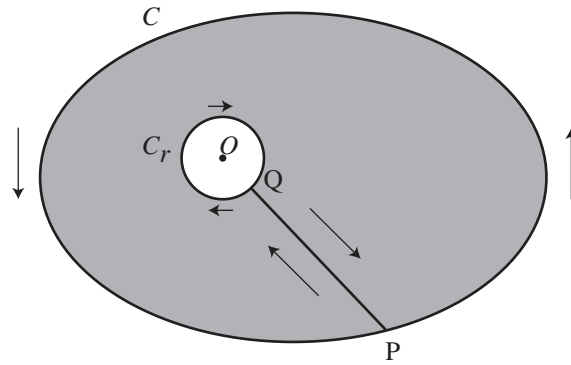


図 1: コーシーの積分公式

同様に,  $a$  を中心とする半径  $1$  の円周を  $C$  とするとき,

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

となります。

## コーシーの積分公式

**コーシーの積分公式**は, 領域  $D$  で正則な関数  $f$  の点  $z$  における値  $f(z)$  が,  $D$  内で点  $z$  を囲み正の方向に 1 周する閉曲線  $C$  に沿った積分を使って

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (5)$$

と表されるというものです。とくに  $z = 0$  のとき,  $C$  を原点を囲み正の方向に一周する閉曲線として

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (6)$$

となります。この公式は, 正則関数  $f$  の点  $z$  での値は,  $z$  を囲む閉曲線上の値だけで決まってしまうことを示しています。正則関数を「軟らかい板を, ぐにゃぐにゃとどこにも折れ目がなく曲げたようなもの」と考えれば, ある点での関数の値が周囲での値によって決まってしまう, というのは, それほど不思議ではありません。

(6) 式の意味を考えるため, 図 1 のような, 原点を囲む閉曲線  $C$  とその内側で原点を囲む半径  $r$  の円  $C_r$ , それに両者を結ぶ線分  $PQ$  を考えます。関数  $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$  は原点で正則ではありませんが,  $P$  から  $C$  を正の向きに 1 周  $\rightarrow PQ \rightarrow C_r$  を逆向きに 1 周  $\rightarrow QP$  という経路を考えると, この経路は閉曲線で, その内部で関数  $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$  は正則です。よって, コーシーの積分定理により

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_P^Q \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_Q^P \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0 \quad (7)$$

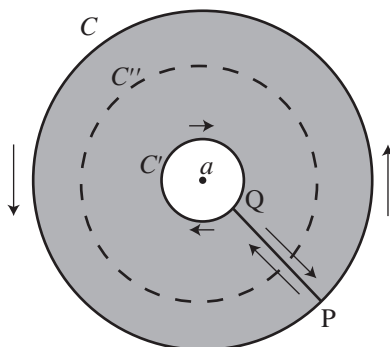


図 2: 孤立特異点とローラン級数展開

で、 $P \rightarrow Q$  の積分と  $Q \rightarrow P$  の積分は打ち消し合い、 $-C_r$  ( $C_r$  の負の方向) に沿った積分は  $(-1) \times C_r$  の正の方向に沿った積分となるので、

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (8)$$

となります。 $r \rightarrow 0$  のとき、上式の右辺は  $\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta$  に収束し<sup>1</sup>、前節で説明した  $\frac{1}{z}$  の積分を使うと

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta = f(0) \oint_{C_r} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i f(0) \quad (9)$$

となりますから、(6) 式が得られました。これをさらに  $z$  だけ (積分経路も含めて) 平行移動すると、(5) 式が得られます<sup>2</sup>。

## 孤立特異点とローラン級数展開

領域  $D$  において、関数  $f(z)$  が 1 点  $a$  を除いて正則であるとき、 $a$  を  $f(z)$  の**孤立特異点**といいます。つまり、今日の最初に述べた「穴」です。

このとき、 $a$  を中心とする円周  $C$  と、その内部でやはり  $a$  を中心とする円周  $C'$  を考え、図 2 のように、 $P$  から  $C$  を正の向きに 1 周  $\rightarrow PQ \rightarrow C'$  を逆向きに 1 周  $\rightarrow QP$  という閉じた経路を考えます。すると、経路の内部で  $f(z)$  は正則ですから、 $f(z)$  をコーシーの積分公式を用いて表すことができます。図 1 と同様の関係を考慮すると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (10)$$

となります。

ここで、(10) 式の第 1 項の積分の過程では、 $\zeta$  が外側の経路  $C$  を動き、 $z$  は  $C$  の内部にあるので

<sup>1</sup>なぜ収束するのは、参考文献を参照してください。

<sup>2</sup>詳細は、参考文献を参照してください。

$|z - a| < |\zeta - a|$  です。そこで、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} \quad (11)$$

と変形すると、右辺の2つめの分数は初項1、公比 $\frac{z - a}{\zeta - a}$ の等比級数の和で表され、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left( \frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right\} \quad (12)$$

となります。同様に、(10)式の第2項の積分の過程では、 $\zeta$ が内側の経路 $C'$ を動き、 $z$ は $C'$ の外部にあるので $|\zeta - a| < |z - a|$ で、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \left( \frac{\zeta - a}{z - a} \right)^2 + \dots \right\} \quad (13)$$

と表されます。

(12)式、(13)式を(10)式に代入すると、

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + a_0 + a_1(z - a) + \dots + a_{n-1}(z - a)^{n-1} + a_n(z - a)^n + \dots \quad (14)$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (15)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

となります<sup>3</sup>。

ここで、図2の円環領域で $f(z)$ は正則なので、コーシーの積分定理により

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta = 0 \quad (17)$$

であり、これを使うと、(15)式と(16)式を合わせて

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta - a)^{-n-1} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (18)$$

と、円周 $C$ だけを使って表すことができます。

関数 $f(z)$ をこのような級数で表すことを、 $f(z)$ の孤立特異点 $a$ のまわりの**ローラン (Laurent) 級数展開**といいます。

<sup>3</sup>付録も参照してください。ここで「級数の積分」を「積分の級数」に置き換えられるのは当然ではなく、本当は、ここがこの証明で難しいところです。ここでは詳細は略します。

## $n$ 位の極

関数  $f(z)$  と孤立特異点  $a$  について、ローラン級数の負のべきの項が有限、すなわち級数が  $a_{-n}$  ( $n \geq 1$ ) から始まる時、 $a$  を  **$n$ 位の極** といいます。なお、負のべきの項が無限に現れるときは、 $a$  は **真性特異点** とよばれます。

$a$  が  $n$  位の極であるとき、

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots \quad (19)$$

ですから、両辺を  $(z-a)^n$  倍すると

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots \quad (20)$$

となるので、

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z) = a_{-n} \quad (21)$$

となります。

## 留数

図2において、 $f(z)$  を円環部分の中にある円周  $C''$  に沿って正の向きに1周して積分することを考えます。 $f(z)$  をローラン級数展開したものの各項を積分すると考えると、今回の最初に説明した「 $z^n$  の積分」により、 $\frac{1}{z-a}$  の項以外はすべて0となり、

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} f(z) dz \quad (22)$$

となります<sup>4</sup>。この  $a_{-1}$  を、 $f(z)$  の孤立特異点  $a$  における **留数 (residue)** といい、 $\text{Res}(a; f)$  で表します。

ここで、孤立特異点  $a$  が  $n$  位の極であるとき

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots \quad (23)$$

と表されますから、

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots \quad (24)$$

という、べき級数が得られます。したがって、両辺を  $(n-1)$  回微分すると、

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + \frac{n!}{1!} a_0 (z-a) + \frac{(n+1)!}{2!} a_1 (z-a)^2 + \cdots \quad (25)$$

となり、

$$\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) \quad (26)$$

が得られます。これらのことは、

<sup>4</sup>こう言えるのは、ローラン級数が「一様収束」しているからです。詳細は略します。

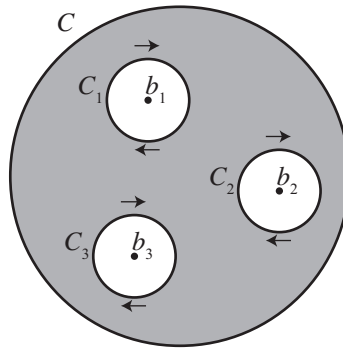


図 3: 有限個の孤立特異点を含む場合

- 孤立特異点つまり「穴」を囲んだ閉曲線上の積分は、留数で表される。
- 留数は、上の (26) 式が計算できれば求められる

ことを表しています。

とくに、 $n = 1$ ，すなわち  $a$  が 1 位の極の場合は、

$$\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) \quad (27)$$

となります。これは、(21) 式で  $n = 1$  とした場合に相当しています。

### 孤立特異点が複数ある場合

また、閉曲線  $C$  の内部で、関数  $f(z)$  が有限個の孤立特異点  $b_1, b_2, \dots$  を除いて正則であるとします。このとき、 $b_1, b_2, \dots$  のそれぞれを囲み  $C$  の内部にある円周を正の向きに一周する経路を  $C_1, C_2, \dots$  とすると、これまでと同様の考えで、コーシーの積分定理により

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz - \dots = 0 \quad (28)$$

ですから、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz = \text{Res}(b_1; f) + \text{Res}(b_2; f) + \dots \quad (29)$$

がなりたちます。このことは、

いくつかの「穴」を囲んだ閉曲線上の積分も、それぞれの「穴」での留数がわかれば求められる

ことを示しています。

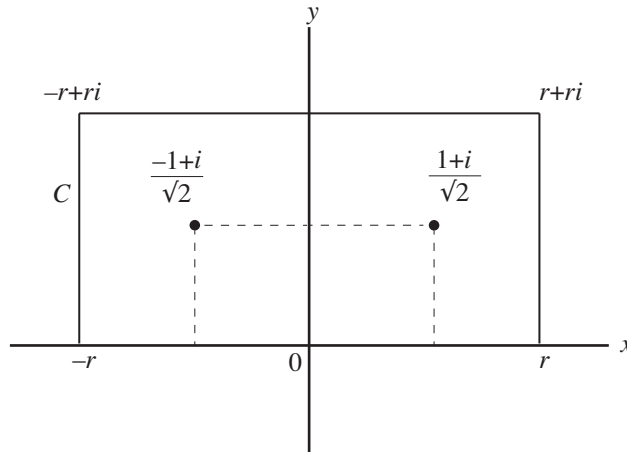


図 4: 留数と定積分

### 問題例

留数の考えを使って、図 4 に示す、幅  $2r$ ・高さ  $r$  の長方形の経路  $C$  に沿った  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$  の積分を考えます。

$$\frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})} \quad (30)$$

ですから、4 つある  $f(z)$  の孤立特異点  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$  は、すべて 1 位の極です。

図 4 の経路  $C$  の内部に入っている極は、 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$  だけです。ここで、(27) 式より

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} (z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}) f(z) \\ &= \frac{1}{(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}})} \\ &= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (31)$$

となり、同様に  $\operatorname{Res}(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$  となります。

よって、(29) 式より、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \operatorname{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f\right) = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \quad (32)$$

で、すなわち  $\oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  が得られます。

さて、この考えを使って、実関数の積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$  を求めることを考えます。これが、複素関数論の説明の初めに言っていた、「本当にやりたかったこと」でした。

そのために、経路  $C$  を各辺に分けて、それぞれの辺での  $\frac{1}{z^4+1}$  の積分が、実軸上以外では  $r \rightarrow \infty$  のとき 0 になることを示します。これには、実軸以外の辺上では  $|z| \geq r$  であることを用います。

例えば、長方形の右側の立辺では

$$\begin{aligned} \left| \int_r^{r+ri} \frac{1}{z^4+1} dz \right| &\leq \int_r^{r+ri} \frac{1}{|z|^4+1} d|z| \\ &\leq \int_0^r \frac{1}{r^4+1} dy = \frac{r}{r^4+1} \end{aligned} \quad (33)$$

で、 $r \rightarrow \infty$  のとき 0 になります。他の辺でも同様で、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  が得られます。

## 問題

次の積分 ( $C$  は原点を中心とする半径 2 の円周) を求めてください。

$$\frac{-1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz \quad (A1)$$

(この問題は、歌手の矢野顕子氏のアルバム「ふたりぼっちで行こう」の CD ジャケットに出ているもので、答えは「ふたり」の 2 です。)

**注**  $z$  を複素数とすると、三角関数  $\sin z, \cos z$  はそれぞれ

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (A2)$$

と定義されます。前回の演習問題で、 $\theta$  を実数とすると

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (A3)$$

という関係があることを示しました。(A2) 式による複素三角関数の定義は、(A3) 式の実数  $\theta$  を複素数  $z$  に置き換えたものです。

## 付録：正則関数が無限回微分可能であることの「直観的な」説明と、正則関数のテイラー展開

関数  $f(z)$  が領域  $D$  内で正則であるとき、 $f(z)$  が無限回微分可能であることを、「直観的」に説明します。

コーシーの積分公式より、領域  $D$  内の閉曲線  $C$  について

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (A1)$$

となります。このとき、 $C$  内の点  $a$  について

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \quad (A2)$$



で、あらためて $\zeta$ を $z$ と書き直すと

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{A3})$$

です。そこで、 $f'(a)$ を考えると

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{da} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{A4})$$

となりますが、ここで積分と微分の順番を逆にしていいなら、

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{da} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{A5})$$

で、

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \frac{f(z)}{z-a} &= f(z) \frac{d}{da} (z-a)^{-1} \\ &= f(z) (-(z-a)^{-2}) \cdot (-1) \\ &= \frac{f(z)}{(z-a)^2} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

ですから

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \quad (\text{A7})$$

となります。もう1回微分すると

$$f''(a) = \frac{2 \cdot 1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz \quad (\text{A8})$$

で、これを繰り返すと

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (\text{A9})$$

となり、無限回微分可能であることがわかります。

ただ、この途中で行った「積分と微分を交換する」ことは当然にできることではなく、ここにある積分が「絶対可積分」であることから導かれます。そのため、ここの説明は「直観的」としています。また、(A9)式はグルサの定理とよばれています。

なお、本文(14)式のローラン級数で、次数が正である部分は、その係数が本文(15)式で、(A9)式とは各項が $n!$ 倍の違いになっています。この部分は、関数 $f(z)$ が正則である領域 $D$ 内の閉曲線 $C$ に関するもので、これが $f(z)$ が正則であるときの $a$ のまわりのテイラー展開、すなわち

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (\text{A10})$$

に相当します。

---

## 参考文献

志賀浩二, 複素数30講, 朝倉書店, 1989. ISBN978-4-254-11481-2

神保道夫, 複素関数入門, 岩波書店, 2003. ISBN978-4-000-06874-1

中島匠一, 複素関数入門—留数計算への道すじ, 共立出版, 2022, ISBN978-4-320-11476-0