2022年度秋学期　応用数学（解析）　第１３回演習の解答例

$\dfrac{\sin z}{\cos z}$ の孤立特異点は，$\cos z = 0$ となる点（零点）です。

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \tag{A1}$$

とおくと $e^{iz} + e^{-iz} = 0$ で，両辺に e^{iz} をかけると $e^{2iz} + 1 = 0$ となります。$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ という関係から $e^{i\theta}$ は周期 2π の周期関数で，さらにオイラーの式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ を考えると，

$$2iz = i(\pi \pm 2n\pi)\ (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{A2}$$

となり，ここから $z = \dfrac{\pi}{2} \pm n\pi\ (n = 0, 1, 2, \dots)$ が得られます。

原点を中心とする半径 2 の円の内部で，$z = \dfrac{\pi}{2} \pm n\pi = 0\ (n = 0, 1, 2, \dots)$ を満たす z は，$z = \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}$ です。よって

$$\oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}) + \mathrm{Res}(-\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}) \right) \tag{A3}$$

となります。

孤立特異点 $z = \dfrac{\pi}{2}$ について，本文の (21) 式で $n = 1$ として

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} (z - \frac{\pi}{2}) \frac{\sin z}{\cos z} &= \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} (z - \frac{\pi}{2}) \frac{\sin z}{-\sin(z - \frac{\pi}{2})} \\ &= -\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \sin z \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\sin(z - \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \tag{A4}$$

で，$\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$，$\displaystyle\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\sin(z - \frac{\pi}{2})} = 1$ なので，$\displaystyle\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} (z - \frac{\pi}{2}) \frac{\sin z}{\cos z} = -1$ となります。すなわち，$z = \dfrac{\pi}{2}$ は 1 位の極で，このとき (27) 式のとおり $\mathrm{Res}(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\sin z}{\cos z}) = -1$ です。

同様に，孤立特異点 $z = -\dfrac{\pi}{2}$ については

$$\begin{aligned} \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} (z - (-\frac{\pi}{2})) \frac{\sin z}{\cos z} &= \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} (z + \frac{\pi}{2}) \frac{\sin z}{\sin(z + \frac{\pi}{2})} \\ &= \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \sin z \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\sin(z + \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \tag{A5}$$

で，$\sin(-\dfrac{\pi}{2}) = -1$，$\displaystyle\lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\sin(z + \frac{\pi}{2})} = 1$ なので，$\mathrm{Res}(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\sin z}{\cos z}) = -1$ です。

したがって，問題の答は

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz &= \frac{-1}{2\pi i} \left[2\pi i \left(\mathrm{Res}(\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}) + \mathrm{Res}(-\frac{\pi}{2}; \frac{\sin z}{\cos z}) \right) \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \cdot 2\pi i((-1) + (-1)) = 2 \end{aligned} \tag{A6}$$

となります。■