2022年度秋学期　応用数学（解析）　第１４回演習の解答例

集合 S の部分集合 T を考えると，$T \subseteq S$ です。任意の集合 X について，$T \cap X \subseteq S$ なので，本文の外測度の性質 2 から

$$m^*(T \cap X) \leqq m^*(S) = 0 \tag{A1}$$

で，外測度は 0 以上なので，$m^*(T \cap X) = 0$ です。また，$T^c \cap X \subset X$ なので，同様に

$$m^*(T^c \cap X) \leqq m^*(X) \tag{A2}$$

です。以上から，

$$m^*(X) \geqq m^*(T^c \cap X) = 0 + m^*(T^c \cap X) = m^*(T \cap X) + m^*(T^c \cap X) \tag{A3}$$

となりますが，集合 X は集合 $T \cap X$ と集合 $T^c \cap X$ の和集合ですから，本文の「完全劣加法性」から $m^*(X) \leqq m^*(T \cap X) + m^*(T^c \cap X)$ です。

よって，$m^*(X) = m^*(T \cap X) + m^*(T^c \cap X)$ となり，本文の可測集合の定義（(4) 式）から集合 T は可測集合です。集合 S の外測度 $m^*(S)$ は 0 ですから，集合 S とそのすべての部分集合の測度は 0 となります。