

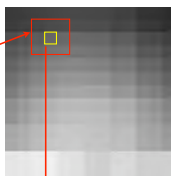
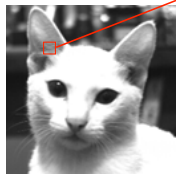
2022年度秋学期 画像情報処理 第2回  
結像と空間周波数, フーリエ級数

浅野 晃  
関西大学総合情報学部



第1部のトピック

標本化と量子化



60 60 60  
65 65 65  
70 70 70

画像は, 離散的な点(画素, pixel)の集まりでできている  
[標本化]

各画素は, 明るさ(輝度)を表す整数である  
[量子化]

空間周波数とフーリエ変換

標本化(サンプリング)・・・どのくらいの細かさで?  
[空間周波数]

空間周波数を求めるのが  
[フーリエ変換]

## 光による画像の生成

## 波の性質・回折と干渉

### 中国・銭塘江の「大海嘯」

こちらで見てみましょう

[https://www2.nhk.or.jp/archives/tv60bin/detail/index.cgi?das\\_id=D0009010616\\_00000](https://www2.nhk.or.jp/archives/tv60bin/detail/index.cgi?das_id=D0009010616_00000)

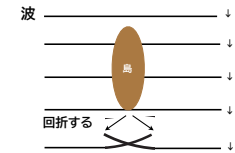
(ウェブサイトの「参考リンク」で、NHKアーカイブスのプレビューを見てください。最後のほうに、右の図のような交差する波が映ります)

### 波の「干渉」

山どうし・谷どうしが  
重なり合うと強めあう

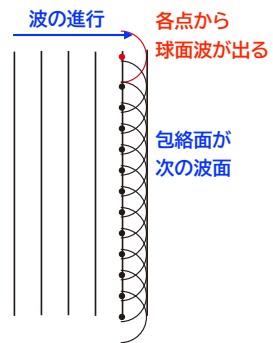
### 波の「回折」

島の裏側に  
回り込む

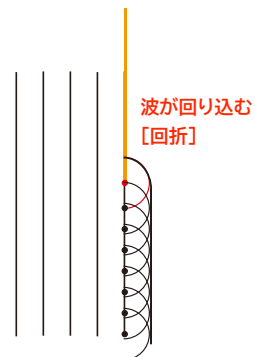


## ホイヘンスの原理と波の回折

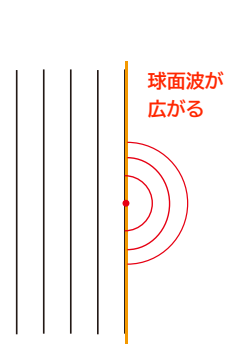
### ホイヘンスの原理



### 障害物があると

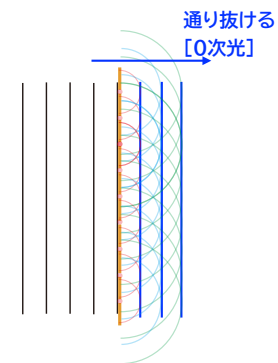


### 孔を通り抜けると

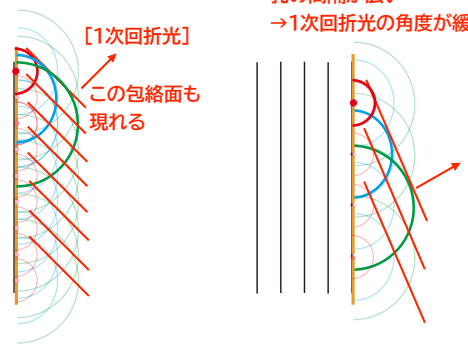


## 回折格子と1次回折光

[回折格子] = 孔が周期的に開いている



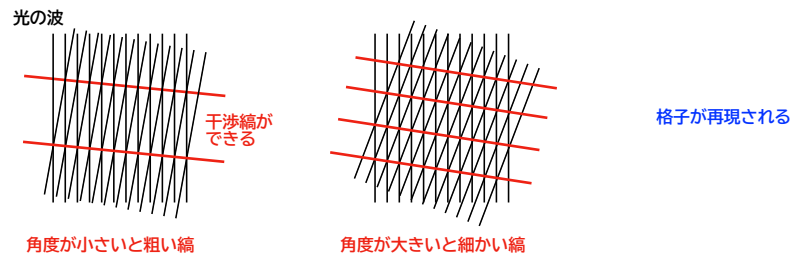
[1次回折光]  
この包絡面も  
現れる



孔の間隔が広い  
→1次回折光の角度が緩い

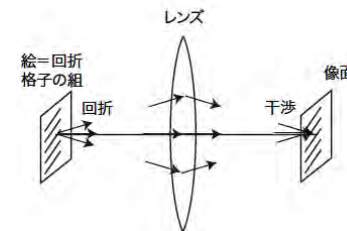
# 光の干渉

回折光と0次光が重なると再び縞ができる  
細かい格子ほど大きな角度で回折光が出るから、



# 画像の生成(結像)

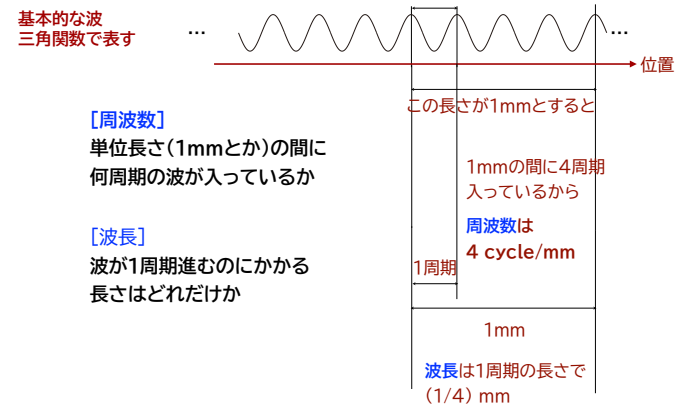
画像は回折格子の重ね合わせであり、  
それぞれの回折格子で回折された光が像面で干渉して、画像が再現される



画像は回折格子, すなわち波の重ね合わせである  
どんな波が重ね合わされているかを求める計算が[フーリエ変換]

# 空間周波数とフーリエ級数

# 波の周波数と波長

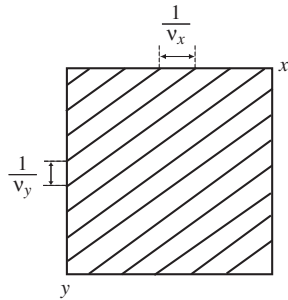


[周波数]  
単位長さ(1mmとか)の間に  
何周期の波が入っているか

[波長]  
波が1周期進むのにかかる  
長さはどれだけか

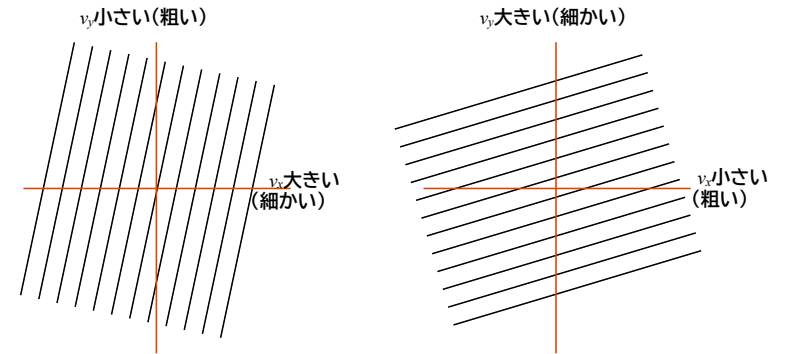
# 空間周波数

空間周波数 =  
 平面上の「明暗の波」の細かさを表す  
 単位長さの中で明暗が何回繰り返すか



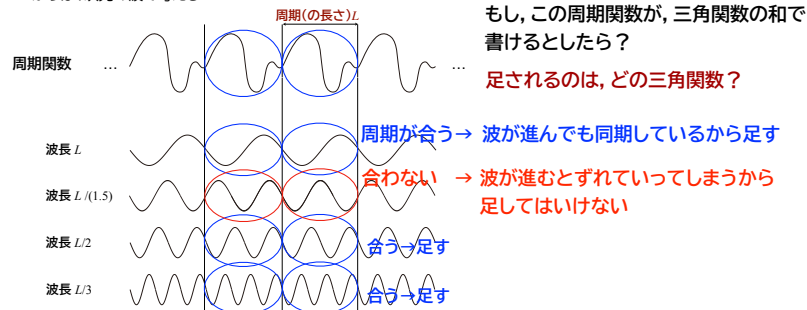
x方向・y方向の2つの空間周波数の組で、  
 ひとつの平面上の波が定まる

# 空間周波数



# 周期関数を分解

ここからは1次元の波で考える



もし、この周期関数が、三角関数の和で書けるとしたら？  
 足されるのは、どの三角関数？

周期が合う → 波が進んでも同期しているから足す  
 合わない → 波が進むとずれていってしまうから足してはいけない

… 足されるのは波長  $L/n$  ( $n$ は整数)のものに限る。  
 無限個の波の足し合わせだが、足し算(級数)で書ける。

# 「無限個だが、足し算で書ける」



周期関数  $f(x)$  が、三角関数の和で書けるとしたら、足されるのは

$$f(x) = \text{波長 } L + \text{波長 } L/2 + \text{波長 } L/3 + \dots + \text{波長 } L/n + \dots$$

… 足されるのは波長  $L/n$  ( $n$ は整数)のものに限るから、  
 無限個の三角関数を足すのだけれども  
 このように「項」を並べることができる

「級数」という

## 波の進み方を「角度」で表す

★三角関数を使うときは、角度を単位にしなければいけない

$L/n$  波長

$n/L$  単位長さあたり

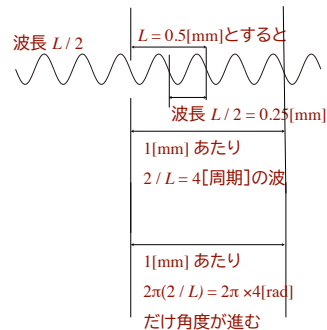
何周期ぶんの波が入っているか  
[周波数]

$2\pi(n/L)$  単位長さあたり

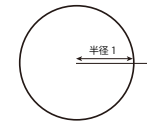
位相(角度)が何ラジアン進むか  
[角周波数]

1周=360度=2πラジアン

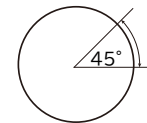
ラジアン?



## ラジアン(弧度法)



半径1の円の  
円周の長さは  $2\pi$



この角度を、  
対応する円周の長さで表す

$45^\circ = 1$ 周の1/8 だから、  
ラジアンであらわすと  
 $2\pi \times (1/8) = \pi/4$  (rad)

1周=360度=2πラジアン

## 周期関数 = 三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi \frac{1}{L} x) + a_2 \cos(2\pi \frac{2}{L} x) + \dots + a_n \cos(2\pi \frac{n}{L} x) + \dots$$

波長  $L$                   波長  $L/2$                   波長  $L/n$

なのですが...

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \}$$

指数関数なら計算が簡単

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{かけ算} = \text{指数の足し算}$$

## 三角関数と指数関数の関係

$i^2 = -1$  虚数単位

オイラーの式  $\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$

$$\cos \omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}, \quad \sin \omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

$$\exp(x) = e^x \quad (e^x)' = e^x \quad \text{微分しても変わらない}$$

$e = 2.71828\dots$

ひとつの三角関数=波は、  
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが、  
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる

## つづきは

波長  $L/n$  の波は  $\exp(i2\pi\frac{n}{L}x)$  と  $\exp(-i2\pi\frac{n}{L}x)$  の組

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  は, 波長  $L/n$  の波を足し合わせて

プラスもマイナスも $\infty$ (プラスとマイナスの組で1つの波だから)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

という級数で書けるはず。

これがフーリエ級数なんですが,  
この係数はどうやって求めるの？

続きは次回。