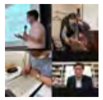
2022年度秋学期 画像情報処理　　第3回

フーリエ級数とフーリエ変換

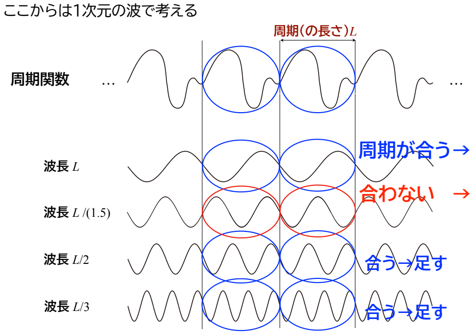
浅野 晃
関西大学総合情報学部



フーリエ級数

周期関数を分解

ここからは1次元の波で考える



もし, この周期関数が, 三角関数の和で書けるとしたら？

足されるのは, どの三角関数？

周期が合う→ 波が進んでも同期しているから足す

合わない → 波が進むとずれていってしまうから足してはいけない

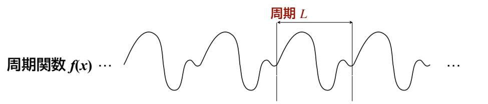
合う→足す

合う→足す

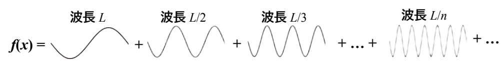
… 足されるのは波長 L / n(nは整数)のものに限る。

無限個の波の足し合わせだが, 足し算(級数)で書ける。

「無限個だが, 足し算で書ける」



周期関数 $f(x)$が, 三角関数の和で書けるとしたら, 足されるのは



… 足されるのは波長 L / n(nは整数)のものに限るから,

無限個の三角関数を足すのだけれども

このように「項」を並べることができる

「級数」という

周期関数＝三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi \frac{1}{L} x) + a_2 \cos(2\pi \frac{2}{L} x) + \ldots + a_n \cos(2\pi \frac{n}{L} x) + \ldots$$

波長 L　　波長 $L/2$　　波長 L/n

なのですが…

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

指数関数なら計算が簡単

$$a^x a^y = a^{x+y}$$ かけ算＝指数の足し算

三角関数と指数関数の関係

$i^2 = -1$ 虚数単位

オイラーの式 $\exp(i\omega) = \cos\omega + i \sin\omega$

$$\downarrow$$

$$\cos\omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}, \quad \sin\omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

$\exp(x) = e^x$　$(e^x)' = e^x$ 微分しても変わらない

$e = 2.71828\ldots$

ひとつの三角関数＝波は，
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが，
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる

周期関数を指数関数の和で

波長 L/n の波は $\exp(i2\pi \frac{n}{L} x)$ と $\exp(-i2\pi \frac{n}{L} x)$ の組

周期 L の周期関数 $f(x)$ は，波長 L/n の波を足し合わせて

プラスもマイナスも∞

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

と書ける　はず。

書ける，のはいいが

周期 L の周期関数 $f(x)$ は，波長 L/n の波を足し合わせて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

と書ける　はず。

この係数はどうやって求めるの？

ある波長の波を切り出す

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$ から，波長 L / nの波に対応する指数関数だけを切り出したい

波長 L / n の指数関数 $\exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$

一方，$f(x)$ を構成する指数関数のいずれか（波長 L / m）は

$$\exp\left(i2\pi \frac{m}{L} x\right)$$

ある波長の波を切り出す

波長 L / m の指数関数と L / n の指数関数についてこういう計算をしてみる

$f(x)$ の1周期分だけ積分（積分については後半で）

複素共役

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underbrace{\exp\left(i2\pi \frac{m}{L} x\right)}_{\text{波長 } L / m} \underbrace{\exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right)}_{\text{波長 } L / n} dx$$

この答は mとn が異なるとき（別の波長） 0

mとn が等しいとき（同じ波長） L

指数関数はこの性質をもつ 直交関数系

フーリエ級数展開とフーリエ係数

ある整数

そこで $$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx$$ を計算してみる

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$ なので

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx$$

級数の各項を積分すると，$n = k$ の項だけは積分すると L

他の項は積分すると 0

つまりこの積分の答は $\frac{1}{L} \cdot L a_k = a_k$ 係数が求まった

まとめ・フーリエ級数展開とフーリエ係数

周期 L の周期関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

という波の足し合わせ（級数）で表される（フーリエ級数展開）

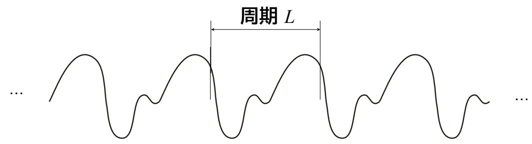
係数 a_n（フーリエ係数）は

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx$$ という積分で表される

フーリエ変換🤔

周期関数は, フーリエ級数で表される

周期 L の周期関数
$f(x)$

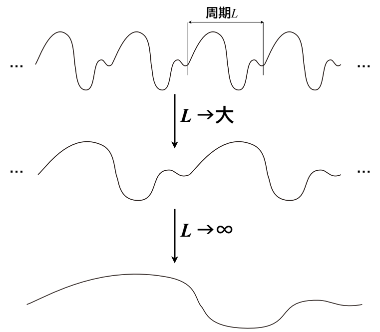


$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

という, 波の足し合わせ(級数)で表される
(フーリエ級数展開)

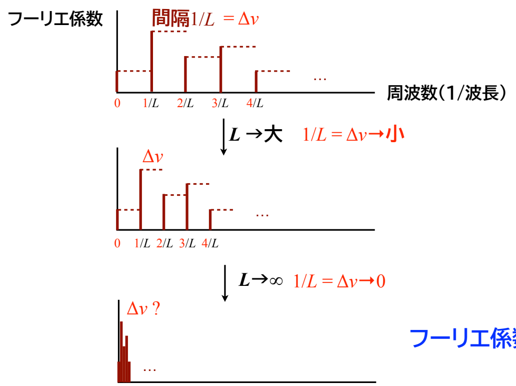
係数 a_k(フーリエ係数)は $a_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right)dx$

周期関数でない場合は？



非周期関数は周期が無限大と考える

周期 L が大きくなっていくと



間隔$1/L$ は周波数の差

これを$\Delta\nu$ で表す

フーリエ係数が隙間なく並ぶ

↓

もはや足し算はできない

級数から積分へ

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)dx$$

$1/L=\Delta\nu$ と書き換える

紛らわしいので別の文字にしただけ

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$$

級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので, ν であらわす

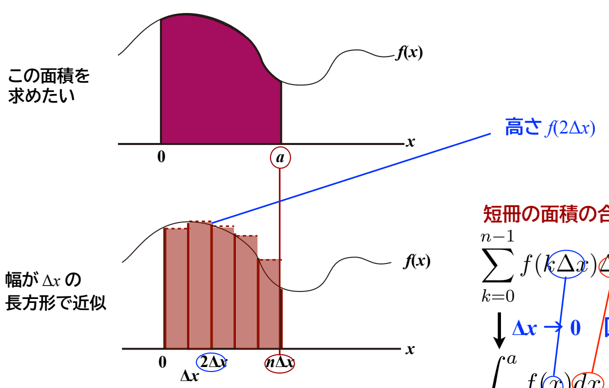
$L\to\infty$ のとき $\Delta\nu\to 0$

このとき $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$ のなかの総和(Σ)が,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu$$ という積分になる

？？？😲

積分とは？



短冊の面積の合計

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

$\downarrow$ $\Delta x\to 0$ 区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$

これが積分

級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので, ν であらわす

$L\to\infty$ のとき $\Delta\nu\to 0$

このとき $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$ のなかの総和(Σ)が,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu$$ という積分になる

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

$\downarrow$ $\Delta x\to 0$ 区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$

！！！

フーリエ変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp\left(-i2\pi\nu\tau\right) d\tau \right) \exp\left(i2\pi\nu x\right) d\nu$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i2\pi\nu x\right) dx$$ と分けて書く

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp\left(i2\pi x\nu\right) d\nu$$

フーリエ変換対　という

フーリエ変換

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i2\pi\nu x\right) dx$$ フーリエ変換

関数 $f(x)$ にどのような周波数の波がどれだけ含まれているか,「波を切り出す」

フーリエ係数の並びだったのが, 周波数の間隔がどんどん小さくなって,
ついにはひとつの関数 $F(\nu)$ になる

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp\left(i2\pi x\nu\right) d\nu$$ 逆フーリエ変換

周波数 ν の波 $\exp(i2\pi x\nu)$ に, 対応するフーリエ係数 $F(\nu)$ をかけたものを
合計（積分）すると $f(x)$ に戻る

2次元の場合は

1次元のフーリエ変換　$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i2\pi\nu x\right) dx$

2次元のフーリエ変換　$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$

この式は, x, y それぞれに1次元のフーリエ変換をしたことになっている

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy$$

注：$\underbrace{\exp(a+b)}_{\text{足し算}} = \underbrace{\exp(a)\exp(b)}_{\text{かけ算}}$