

2022年度秋学期 統計学 第9回
確からしさを記述する — 確率

浅野 晃
関西大学総合情報学部



「確率」って、よく聞くけれど🤔

※「確立」という書き間違いを見ると、かなりがっかりします😓

※中国語では「概率」あるいは「機率」というそうです

2

「降水確率40%」って？

何の割合が40%？

機会

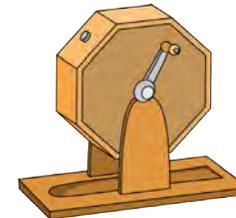
現在と同じ気象状況が
これから何度も何度も起きるとすると
そのうち40%の場合で雨になる

機会のうちの雨の割合が40%

可能性の集合

くじびき

※この機械は「新井式廻轉抽籤器」というそうです(リンク参照)



https://illpop.com/png_season/dec01_a07.htm

↓くじをひくと

当たった！

現実には起きたのは、
これだけ

他のことは起きていない

可能性の集合

しかし



当たった

他の可能性もあった

はずれ 当たり はずれ

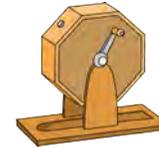
こうなるかも知れなかった

「偶然」(人知が及ばない)

[ランダム現象]という

可能性の集合

現実 可能性



当たった

はずれ 当たり はずれ

可能性のうち
どの結果になりやすいか？

を、数値で表せないか？
(ギャンブラーの数学)

「確率」の定義💡

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は、
[事象] event

そのできごとがおきる可能性のある、十分多くの機会があるとき、
[試行] trial
それらの機会のうち、そのできごとがおきる機会の数の割合

くじを十分多くの回数ひくとき、10回中3回の割合で当たるなら、確率0.3
十分多くの人がそれぞれ1回くじをひくと、10人中3人の割合で当たる、でも同じ

※確率は「割合」なので、「大きい・小さい」と表現します。「高い・低い」なのは「可能性」です。

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は、

そのできごとがおきる可能性のある

十分多くの機会があるとき、

おかしな点(1) おかしな点(2)

それらの機会のうち

そのできごとがおきる機会の数の割合

確率の定義・おかしな点(1)

「十分多くの機会」?

数学でいう「十分多く」とは、

だれかが「十分ではない」といったら、
それに応じていくらでも多くすること
ができる、ということ

現実には無理 🙄

確率の定義・おかしな点(2)

機会が「ある」とき?

機会が「あった」ではない

つまり、未来におきるできごとの話をしている。

未来のことはわからない。

確率は測定できないけれど

「十分多くの機会」は現実には無理

未来のことはわからない

人間の思考の限界? 🙄

でも

過去を未来に延長できると考える

(「自然の斉一性」)

十分多くは無理でも、
「そこそこ多く」の機会があれば
そこそこの精度で確率を推定できる

[大数の法則]

というわけで確率は

「十分多くの機会」に関する話を、次の1回の機会にあてはめている

ギャンブラーは、
日常的に賭けをしているから、
確率の大きなできごとを見抜いて賭ければ、
全体として勝つことができる

どんな名ギャンブラーでも、1回の賭けに
必ず勝つことはできない

もうひとつの確率の定義 🤔

さいころで1が出る確率

なぜ1/6なのか？

$$\frac{\text{「1」は1通り}}{1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{の6通り}} = 1/6$$

確率の[ラプラスの定義]という

さっきの「頻度による定義」とは違う… 🤔

ラプラスの定義の意味

$$\frac{\begin{array}{l} n \text{回} \\ \text{「1」は1通り} \end{array}}{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{の6通り} \\ n \text{回 } n \text{ } n \text{ } n \text{ } n \end{array}} = \frac{n/(6n)}{6} = 1/6$$

1~6が皆同じ確率で出る、と認めるなら、
「同様に確からしい」 *equally likely*

さいころを6n回ふる。(nは十分大きい)

nが十分大きければ、1~6は同じ回数出る(頻度による定義)

ラプラスの定義の意味

1~6が皆同じ確率で出る, と認めるなら
「同様に確からしい」

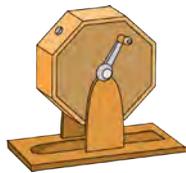
正しいと証明する方法はない

このさいころは偏っていないだろうという
「信頼」によって認めているだけ

条件付き確率と独立 🤔

統計学でいう「独立」とは

2つのランダム現象がおきるとき、一方の結果がもう一方に影響しない



2度続けてひくとき、

1度めで出た玉を戻さなければ、独立でない

1度めで当たりが出ると、
2度めは当たりが減っている

正確には[条件付き確率]を使って定義する

条件付き確率

「雨が降る確率」

「雨の予報が出ているときに雨が降る確率」 ← ふつう、こちらの方が大きい

条件付き確率とは、

何かがおきたときに

何かがおきるとわかったときに

何かがおきるのが確実なときに

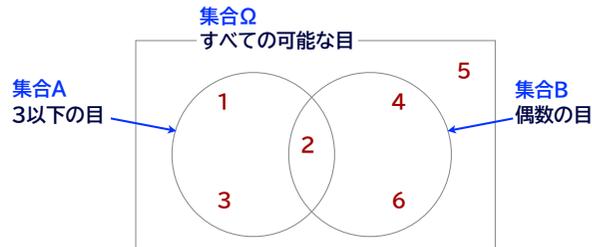
別のことがおきる確率

「何か」がおきることの影響を受けることがある
(「何か」と「別のこと」に因果関係がなくても)

さいころの例で

集合を表す「ベン図」を使って考える

さいころの「可能な目」は、1,2,3,4,5,6



集合と確率

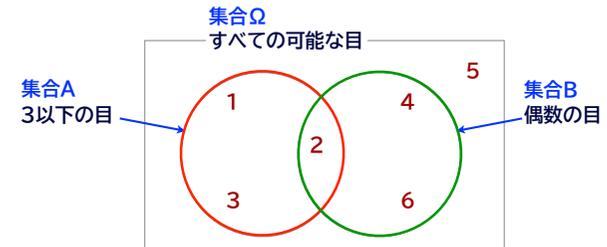
集合Xの要素の数を|X|で表す

「3以下の目が出る確率」

$$|A|/|\Omega| = 3/6 \quad P(A) \text{で表す}$$

「偶数の目が出る確率」

$$|B|/|\Omega| = 3/6 \quad P(B) \text{で表す}$$



集合と確率

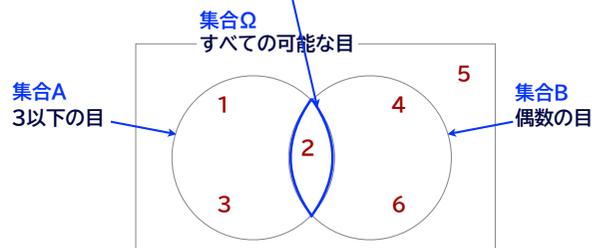
「3以下で、かつ偶数の目が出る確率」

$$|A \cap B|/|\Omega| = 1/6$$

3以下でかつ偶数の目の集合

$P(A \cap B)$ で表す

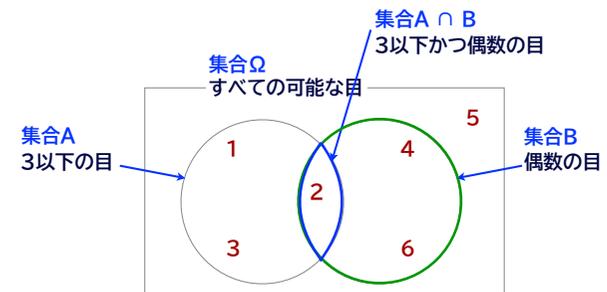
$A \cap B$ で表す



この式は何を表す？

$$|A \cap B| / |B| \quad \text{分母が}\Omega\text{ではなく}B$$

「可能なすべての目」は、 Ω ではなくBになった



条件つき確率

$$\frac{|A \cap B|}{|B|}$$

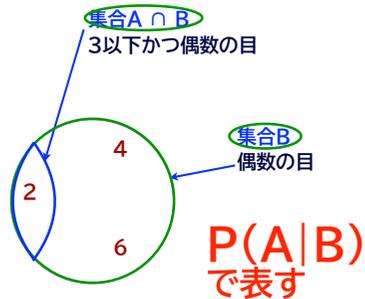
分母が Ω ではなくB

「可能なすべての目」は、 Ω ではなくBになった

偶数の目が出るとわかっているときに

わかってます
「3以下かつ偶数」の目が出る確率

偶数が出ることを条件とする、
3以下が出る[条件つき確率]

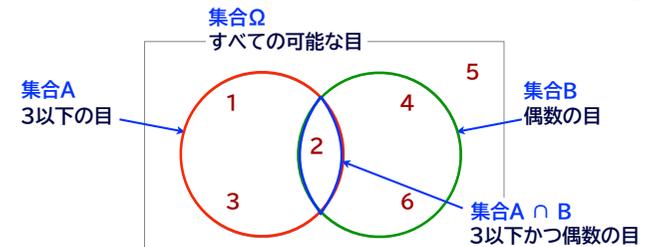


条件つき確率

「3以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| / |\Omega| = 3/6 = 1/2$

偶数が出ることを条件とする、
3以下が出る条件つき確率 $P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

「偶数が出る」という情報によって、
3以下が出る確率が変化した

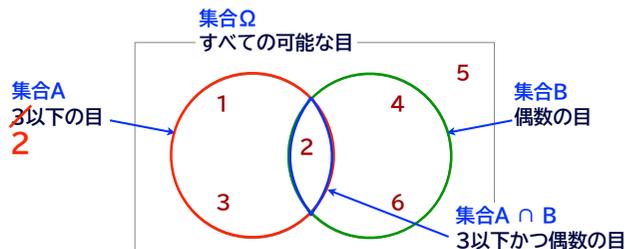


「2以下の目」だったら

「2以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| / |\Omega| = 2/6 = 1/3$

偶数が出ることを条件とする、
2以下が出る条件つき確率 $P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

つまり $P(A) = P(A|B)$



「独立」

「2以下の目が出る確率」 $P(A) = |A| / |\Omega| = 2/6 = 1/3$

偶数が出ることを条件とする、
2以下が出る条件つき確率 $P(A|B) = |A \cap B| / |B| = 1/3$

つまり $P(A) = P(A|B)$ 2以下が出る確率は、「偶数が出る」という
情報によっても、変化しない

$P(A) = P(A|B)$ のとき「事象Aと事象Bは独立」という

AとBが独立 = 「Bが起きる」ことがわかってても、
Aが起きる確率には影響がない

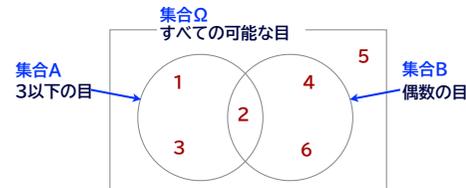
確率の積の法則

Bを条件とする, Aの条件つき確率

$$\begin{aligned}P(A|B) &= |A \cap B| / |B| \\ &= (|A \cap B| / |\Omega|) / (|B| / |\Omega|) \\ &= P(A \cap B) / P(B)\end{aligned}$$

つまり

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$



確率の積の法則

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

AとBの両方が
起きる確率

とりあえずBが
起きるものとして,
そのときにAが起きる確率

ところで,
Bが本当に起きる確率

AとBが独立のときは, $P(A|B) = P(A)$ だから

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

AとBが独立のときだけ, こうなることに注意 ※勝手に独立にはいけません。

モンティ・ホール問題 ▶

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール氏が司会するテレビ番組

箱が3つあり、ひとつだけに賞品がある。

ゲストが箱をひとつ選ぶ▶が、まだ開けない

モンティは賞品のありかを知っている。

彼は「ゲストが選ばなかった空箱」を1つ開けて

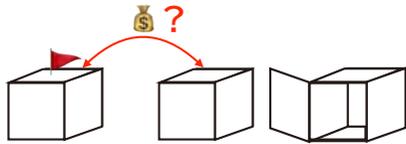


モンティ・ホール問題



「いまなら、さっき選んだ箱ではなく、
まだ開けていないもう1つの箱を選んでもかまいません」

選ぶ箱を変えるほうが、当たる確率が大きくなるか？



答えは

ゲストが選ぶ箱を変えないと、当たる確率1/3

箱を変えると、当たる確率2/3

箱は残り2つだから、当たる確率は、
箱を変えても変えなくても1/2じゃないの？

※違います。「勝手に同確率」にはいけません。

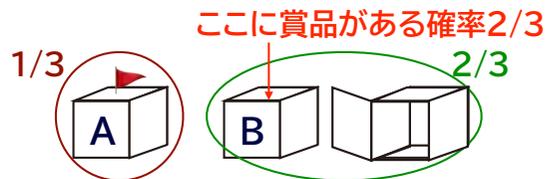
もっとも簡単な説明

箱をA,B,Cとし、ゲストがAを選んだとする

賞品が Aにある確率 1/3

「BまたはC」にある確率 2/3

モンティが開けるのは必ず空の箱 → 上の確率は、
箱を開けても変わらない



本当に正しいか？

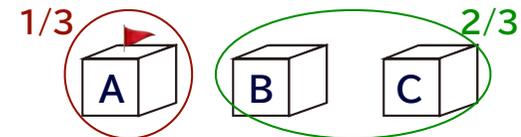
賞品が Aにある確率 1/3

「BまたはC」にある確率 2/3

この確率は、
箱を開けても変わらない

本当か？

「モンティは、賞品がある箱は開けない」



本当に正しいか？

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

賞品がBにあるなら、Cしか開けられない
賞品がCにあるなら、Bしか開けられない

「BまたはCにある確率2/3」は、箱を開けても変わらない



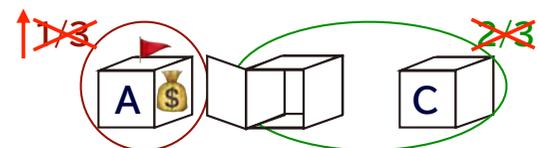
本当に正しいか？

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

賞品がAにあるときは？ モンティはB,Cのどちらを開けてもよい

もしも「賞品がAにあるときは、必ずBを開ける」という裏ルールがあったら？

モンティがBを開けたら、賞品はAにある可能性が高い



本当に正しいか？

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

モンティが、↑これを守ってなかったら？

モンティは、実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んでおり、今回たまたまCを開けたら空だった、としたら

賞品がA,Bにある確率が平等に大きくなる



この問題のポイントは

モンティの行動は、賞品のありかを知る手がかりになっているか？

確率とは「すべての可能性の数のうち、着目している可能性の割合」つまり、モンティの行動が「他にどんな可能性があったか」によって確率は変わる

それには、モンティの「心の中」が影響します。

