2023年度秋学期 応用数学(解析)　第1回

イントロダクション ー ちょっとかっこいい数学を

浅野 晃
関西大学総合情報学部

数学を学ぶこと🤔

数学を学ぶこととは

「問題を解くこと」ではありません

試験では問題を解いてはもらいますが…

大事なのは「わかる💡」こと。

数学の考え方や思想を理解しましょう。

数学の特徴は

抽象化・一般化

微分や積分は, 量の変化を調べる。

- 乗り物の速度🚄
- 放射性元素の崩壊☢️
- 気候の変化⛅

何にでも使えます

「無限」の理解🤔

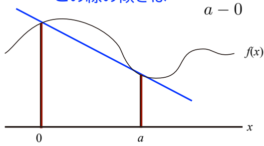
無限と数学

微分・積分は「無限」でできている

微分は「無限に短い時間での変化」
積分は「図形を無限に細かく分けて面積を求める」

微分とは

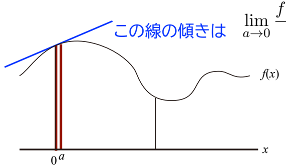
この線の傾きは $\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$



$a \to 0$
幅を無限に狭く

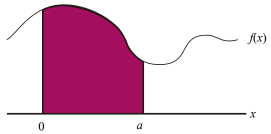
これが微分

この線の傾きは $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} = f'(x)$



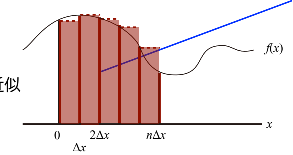
積分とは

この面積を
求めたい



幅が Δx の
長方形で近似

高さ $f(2\Delta x)$



$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

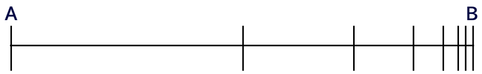
$\Delta x \to 0$
区切りを無限に細かく

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ **これが積分**

無限とは,「多い」だけではない

ゼノンのパラドックス

A地点からB地点に行くには,



無限個の2分点を通らなければならないから, 永遠にたどり着かない？

数学が, これをどうやって克服してきたかをお話しします。

（2分点は無限にあるが，2分点間の距離の合計は「収束」する）

基本的な微分方程式🤔

微分方程式とは

ふつうの方程式は, 解は「数」 $x^2 - 5x + 3 = 0$

微分方程式は, 解が「関数」で, その微分が含まれる方程式

x が t の関数(つまり$x(t)$)のとき,

$x' = x$ 関数は「量の変化」

$x'' - 5x' + 6x = 0$ 微分方程式は「変化の条件」

微分方程式を解くと,「どう変化するか📈」がわかる

基本的な微分方程式

微分方程式は,
特定のパターンのものしか解けない😵

基本的なパターンをいくつか紹介します。

微分方程式に関する話題🤔

微分方程式の応用例

放射性原子核の崩壊 ☢️

原子が崩壊して，数が半分になるまでの時間（半減期）は，
いつの時点でも同じ

振動と共鳴 🔊

振動は，運動と反対方向に復元力が働いて起きる
強制力を加えると，振動が無限に大きくなることがある（共鳴）

「その先の解析学」への導入🤔

複素関数とは

複素数とは

$x^2 = -1$ の解は？　$i = \sqrt{-1}$ として $\pm i$

複素関数とは

複素数の関数で，値も複素数

これを使うと，

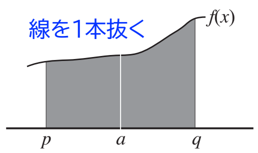
- 三角関数を指数関数で表せる
- 実関数で解けない積分が解ける

測度論とは

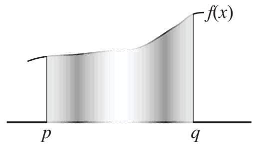
長さ・面積・体積・質量など，いろいろな測り方があるけれど
これらを一般的に「測度」という

「測る」とは何か？
測ることのできる集合とは何か？

積分に対する疑問

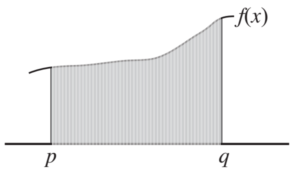


この面積は
$\int_p^q f(x)dx$ から
$\int_a^a f(x)dx$ を抜いたもの
幅が0のとき，積分は0だから　面積は変わらない



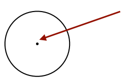
全ての有理数の位置の線を
全部抜いても
本当に面積は変わらないか？

結論だけいえば



全ての有理数の位置の線を
全部抜いても
本当に面積は変わらないか？

変わらない
「有理数全体の集合」の測度は0



パスタが「アルデンテ」のとき
芯は「存在する」が，測度は0

もう一度いいますが

ちょっと，かっこいい数学を。