2023 年度秋学期　応用数学（解析）　第２回

第１部・「無限」の理解／　無限にも大小がある

微分・積分の話をするとき，必ず出てくるのが「無限に」「無限の」という概念です。この講義の第 1 部では，「無限」を数学でどのようにとらえているか，３つの話題を通して説明します。

無限とは「コト」

「無限大」を表すのに，∞ という記号を使います。この記号は，数学以外に日常用語としても使われていると思います。

しかし，間違えてはいけないのは，「∞ という数」があるわけではない，ということです。「無限」というのは，「無限というモノ」ではなく，「無限であるコト」です。一方，数学において計算によって取り扱うことができるのは，実体のある数字，すなわち「モノ」です。そこで数学では，無限というコトを，人が取り扱うことができる具体的な数字を通じて理解しようと努めてきました。

自然数と「数えられる無限」

自然数とは「$1, 2, 3, \ldots$」という数ですが，これは「ひとつ, ふたつ, みっつ, ...」と物を数えるために考えられた，人類にとってもっとも基本的な数です。一方，ここで「...」と書いたように，人類にとってもっとも身近な「無限」でもあります。そこで，自然数の集合が無限であることと同じ意味での無限を，「数えられる無限」の意味で**可算無限**といいます。自然数の「個数」はもちろん無限ですから，数字で表すことはできませんが，仮に個数のようなものがあると考えて，これを**可算基数**といい，$\aleph_0$（アレフゼロ）という記号で表します。

さて，ある集合の要素を数えることを考えてみましょう。集合 A の要素を数えることは，A の各要素に $1, 2, 3, \ldots$ と自然数を割り付けていくのと同じです。この割り付けが A のすべての要素について可能なとき，「集合 A の要素と自然数の集合の要素の間に，過不足なく 1 対 1 対応がつく」あるいは「集合 A と自然数の集合の間に**全単射**が存在する」といいます。

集合 A と自然数の集合の間に全単射が存在するとき，集合 A は自然数と同じ無限である，すなわち基数（あるいは濃度）が $\aleph_0$ であるといいます。

「自然数と対応がつくものは数えられる」というのは，当たり前のような話ですが，無限はそう簡単ではありません。たとえば，偶数の集合を考えてみましょう。これが「一桁の偶数」という有限集合なら，自然数の集合は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，偶数の集合は $\{2, 4, 6, 8\}$ ですから，自然数は偶数より倍近く多いことになります。しかし，「すべての偶数」という無限集合を考えると，自然数と偶数には 1 と 2，2 と 4，3 と 6，...，1234 と 2468，...，n と $2n$，... のように過不足なく 1 対 1 対応がつく，すなわち全単射が存在します。すなわち，偶数の基数も自然数と同じ $\aleph_0$ です。自然数と偶数は「個数が同じ」なのです。

ヒルベルトの「ホテル無限」

数学者ヒルベルト (Hilbert) が述べた，無限についての一種のたとえ話があります。

> 「ホテル無限」には $\aleph_0$ 室の部屋があります。このホテルが満室の時に，ひとりの旅人がやってきました。この旅人は，泊まることができるでしょうか？

有限の数の部屋しかないホテルなら，当然泊まることはできません。しかし，「ホテル無限」では，次のようにすれば泊まることができます。

> 「ホテル無限にお泊まりのお客様，大変お手数ですが，１号室のお客様は２号室へ，２号室のお客様は３号室へ，...，n 号室のお客様は $n+1$ 号室へ，皆様お隣の部屋にお移りいただけますでしょうか。」

こうすれば，１号室が空きます。

実数の基数と対角線論法

次の問題を考えてみます。

> １秒毎にステップ式に動くのではなく，連続的に動く秒針があるとします．あなたは，好きなときにボタンを押して秒針を止めることができます．針を見ずにボタンを押したとき，
>
> (a) 針が０時の位置から３時の位置の間に止まる確率はいくらですか。
> (b) 針が０時ちょうどの位置に止まる確率はいくらですか。

 ∧ ∧
≡・ ・≡
 ( )〜

(a) は，時計の周囲のうち「０時の位置から３時の位置の間」の幅が円周全体の 1/4，ということから求めればいいけど，(b) はどう考えればいいんでしょう？

(a) と同じように考えるんやけど，「『０時ちょうどの位置』の幅」は，いくらかいな？

 ∧◆∧
三 o- o 三
 ( )〜

針は一定の速度で動きますから，特定の場所に止まりやすい，止まりにくい，といった偏りはありません。そこで，(a) については，０時から３時の間の幅は文字盤１周の 1/4 ですから，求める確率は 1/4(0.25) となります[1]。

そうすると，(b) では，文字盤上で「０時ちょうど」の部分の幅は０ですから，そこに止まる確率も０です。この答えについて，こんな疑問を持つ人がいるのではないでしょうか。

> 「１２時ちょうどに針が止まる確率は，『１２時ちょうど』の幅が０だから，０だという。それならば，１２時０分０秒にも１２時０分 0.1 秒にも１２時０分 0.01 秒にも，文字盤の周上のどこに止まる確率もみな０のはずだ。それなのに，『０時から３時までの間』のどこかに止まる確率は 1/4 だという。これはどういうことか」

この疑問に答えるポイントは，**文字盤の周をいくら細かく刻んでも，その刻みで文字盤の周全体を埋め尽くすことはできない**ということです。つまり，１２時０分０秒にも止まる確率も，１２時０分 0.1

[1] 正確には「一様分布」という連続型確率分布モデルを用いて求めます。

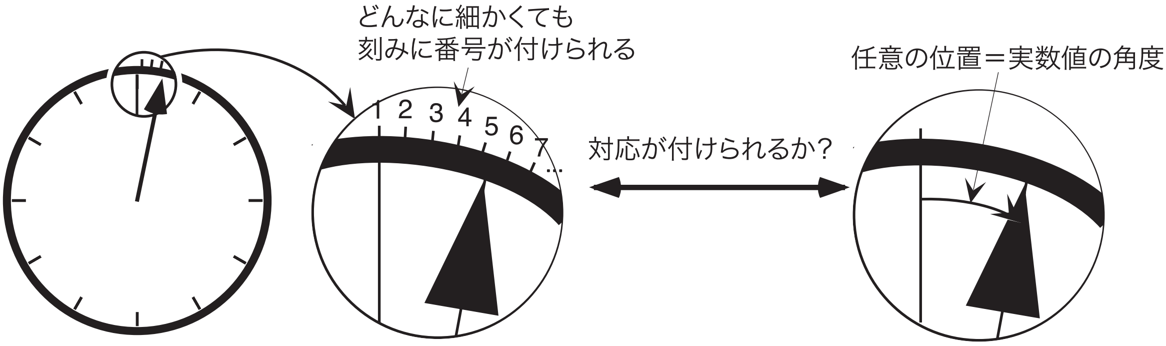

図 1: 周上の無限個の刻みと，実数値の角度

秒に止まる確率も，１２時０分 0.01 秒に止まる確率も皆 0 ですが，だからといって「文字盤の周上のどこに止まる確率もみな 0」ではないのです。

文字盤の周を，１秒刻み，0.1 秒刻み，0.01 秒刻み，といくらでも細かく刻むことはできます。したがって，文字盤の周に無限個の刻みを並べることができます。このように「びっしり」と並んだ無限個の刻みは，数学の言葉では**稠密** (dense) であるといいます。このような無限個の刻みには，１２時ちょうどの位置から数えて，１番から順に番号をつけることができます。すなわち，自然数との間に全単射が存在し，刻みの個数は可算基数，すなわち $\aleph_0$ です。

一方，文字盤の周上の位置は，例えば１２時ちょうどの位置を０度として，実数値の角度で表現できます。もし，文字盤の周上の角度を表す全ての実数値に１番から番号をつけることができるなら，つまり実数と自然数の間に全単射が存在するなら，それは「可算無限個の刻みで，文字盤の周上の全ての点を埋め尽くすことができる」つまり「無限に刻みを細かくすれば，文字盤の周上のどんな位置でも表せる」ことになります。それならば，刻みの各点に止まる確率は 0 ですから，文字盤の周上のどこに止まる確率も 0 ということになります。

しかし，実は**全ての実数値に１番から番号をつけることはできない**，すなわち実数と自然数の間に全単射は存在しないのです。つまり，「無限個」にも「大小」があり，文字盤の周上の実数値の数は，可算基数よりもずっと多い無限，別種の無限なのです。直観的にいえば，可算無限個の刻みは「びっしり」並んでいるのに対して，実数は「べったり」と並んでいる，ということです。

実数の集合が可算でないことは，次に示す**カントール (Cantor) の対角線論法**で簡単に説明できます。説明を簡単にするため，0 以上 1 未満の実数を考えることにします。この区間のすべての実数は，$0.xxxx\ldots$ の形の，有限小数あるいは循環する無限小数（すなわち有理数），あるいは循環しない無限小数（すなわち無理数）で表されます[2]。さて，すべての実数に 1 番から番号をつけることができるとしましょう。そこで，図 2 のようにすべての実数を 1 番から順に上から並べた表を作ります。そこで，この表から，「1 番の実数の小数第 1 位，２番の数の小数第 2 位，…，n 番の数の小数第 n 位，…」のように，対角線上の各数字をつなぎあわせた数をつくり，さらにその数の各けたを「$0 \to 1$，$1 \to 2$，…，$9 \to 0$」のように置き換えた数を考えます。この数は，さっきの表の 1 番の数とは小数第 1 位で，２番の数とは小数第 2 位で，…，n 番の数とは小数第 n 位で，…，異なっています。つまり，表のどの数とも異なった数が存在することになり，「すべての実数を並べた表」であるということに矛盾します。つまり，「すべての実数を 1 番から順番に並べることはできない」ということが証明されます。

[2] 正確には，例えば $0.1 = 0.0999\ldots$ のように，有限小数は無限小数の形に統一して表すことにします。

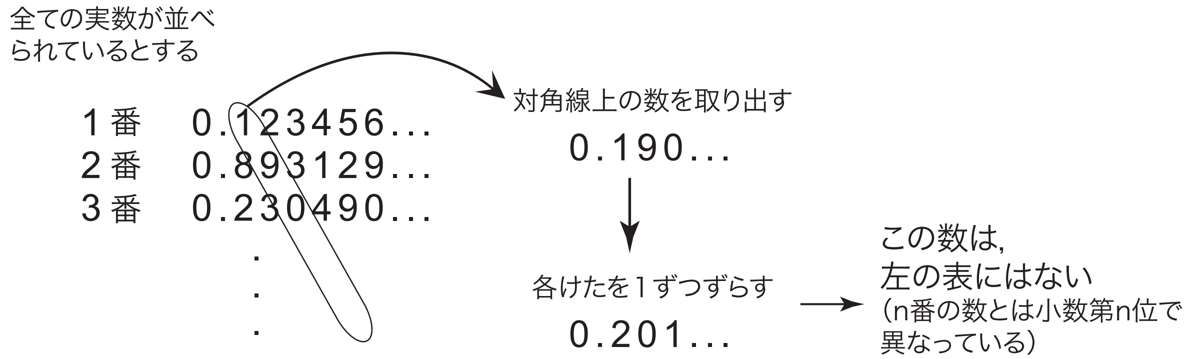

図 2: 対角線論法

人は本当に「無限」を実感できているのか

「無限にも大小がある」という事実が数学に与えた衝撃は，その後の数学をそれ以前のものとは根本的に違ったものにしてしまったほど，大きなものでした。「無限」の性質が人の直観とは異なるということは，人が直観的に把握している「無限」は，たかだか「大きな数」程度のことで，それもたいして大きな数ではないのかもしれません。

「ハレー彗星」は，もっと長い周期の彗星はいくらでもあるのにもかかわらず，なぜ人々の関心をよぶのでしょう。それは，76 年という周期が人の一生とほぼ同じで，「ふつうに生きれば一生に１回だけ見られる」から，といわれています。つまり，人生より長い時間というのは，人は本当には実感できていないものなのでしょう。

次回の講義では，実数の「べったり並んでいる」という性質，すなわち**連続** (continuous) であるという性質について説明します。

問題

1. 有理数（２つの整数を分母分子とする分数で表される数）の基数が $\aleph_0$ であることを示してください。
2. 「ホテル無限」が満室のときに，新たに $\aleph_0$ 人の客がやってきました。どうすれば泊めることができますか。

参考文献

瀬山士郎，はじめての現代数学，ハヤカワ文庫 NF: ISBN978-4150503468（オリジナル（絶版）は，講談社現代新書 909: ISBN978-4061489097）.（大変平易に書かれた本で，おすすめです）