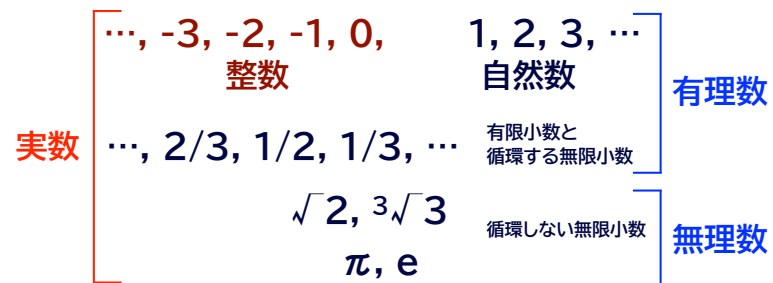




拡張されていく「数」🤔

## 拡張されていく「数」



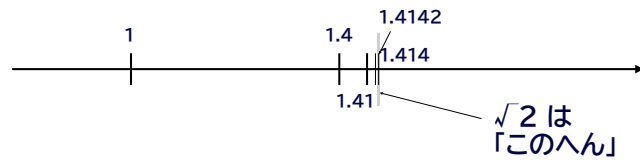
今日扱うのは「実数の連続性を示す方法」

いくつか挙げますが、どれも等価です

無限小数とカントールの公理🤔

## 点と区間

「循環しない無限小数」は、  
数直線上の一つの「点」なのか？

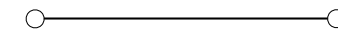


$\sqrt{2}$  は本当に「点」か？ よくわからない…

点ではなく**区間**で考える

## 閉区間と开区間

$a < b$  のとき,  $a$  と  $b$  の間にある数の集合  $\rightarrow$  [区間]



両端を含まない **开区間**  $(a, b)$

最小値・最大値が存在するかどうかは, 数の種類による


## カントールの公理

循環しない無限小数  $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$   
無限に桁数を増やすと, ひとつの実数を表せるのか？



実数は,  
「入れ子」の閉区間の極限で定義する

その極限が,  $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$  であるとする

実数とデデキントの切断 

# デデキントの切断

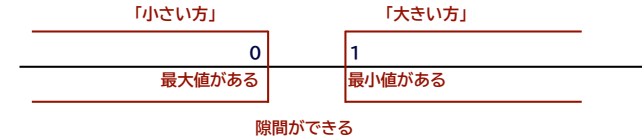
数直線をある場所で切断し、  
数の集合を「大きい方」と「小さい方」に分ける

(ある集合の)すべての数を、  
一方の組のどの数も  
もう一方の組のどの数よりも小さくなるように、  
2つの組に分ける



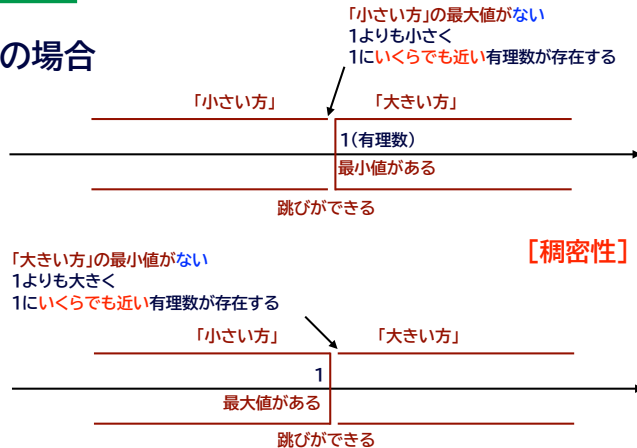
# 整数の切断

整数の場合



# 有理数の切断

有理数の場合



# 有理数の切断

有理数の場合こういう場合もある



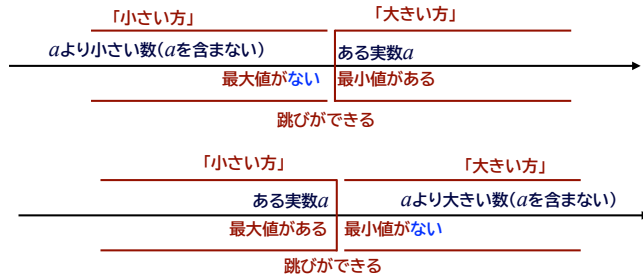
- √2よりも小さく  
√2にいくらでも近い有理数も
- √2よりも大きく  
√2にいくらでも近い有理数も

どちらも存在する

「稠密」とは、  
いくらでも細かく「びっしり」と  
毛の植わっているブラシのようなもの

# 実数の切断

実数は、必ず下のどちらかになる 稠密な上に[連続性]

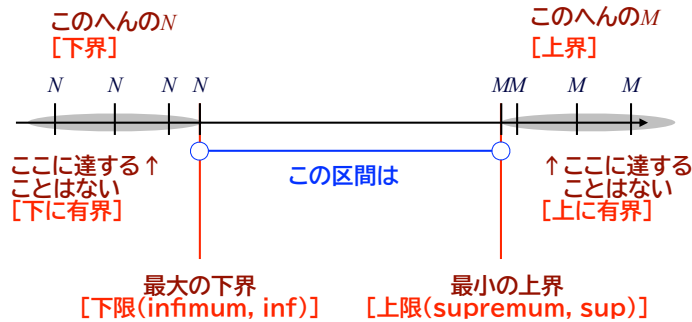


実数とは、「切断の切り口」である  
「連続」とは、「べったり」と塗り付けられた塗料のようなもの

# 上限と下限 ワイエルシュトラスの定理

# 有界, 上界・下界, 上限・下限

开区間には最大値も最小値もないが,  
上にも下にも限界はある



# ワイエルシュトラスの定理

実数からなる集合が下(上)に有界ならば デデキントの切断から導ける  
必ず下限(上限)が存在する

実数からなるある集合Sが、下に有界とすると、



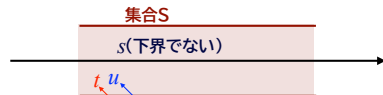
どちらかの切断を形成し、実数sが定まる。  
下の切断なら、下限(最大の下界)が存在する。上の切断にならないことを示す

# ワイエルシュトラスの定理

こちらの切断だとすると



実数  $s$  は、集合  $S$  の下界でない数だから、集合  $S$  を見ると



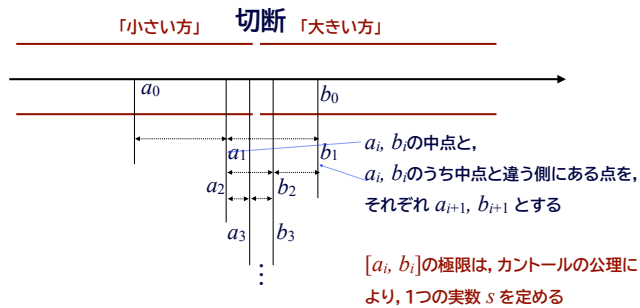
$s$  より小さな数  $t$  が、集合  $S$  に属しているはず  
 $s$  と  $t$  の間にある数  $u$  も、集合  $S$  に属しているはず  
 $u$  は  $t$  より大きいから、 $u$  は「集合  $S$  の下界ではない数」である  
 $s$  は  $u$  より大きい。

これは、「 $s$  は 集合  $S$  の下界ではない数のうちで最小」に矛盾 つまり、「こちらの切断ではない」

# 実数を定義する 各公理・定理間の関係

# カントールの公理とデデキントの切断

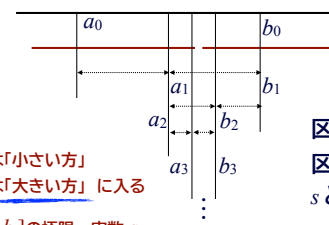
カントールの公理によって定まる実数は、  
デデキントの切断によって切り口に現れる実数と同じか？



この  $s$  は、デデキントの切断による「切り口」にあるか？

# カントールの公理とデデキントの切断

「小さい方」 切断 「大きい方」  
 実数  $s$  が「小さい方」に属するとする



$s$  より大きい数  $t$  については  
 どんなに  $t$  が  $s$  に近くても

区間  $[a_i, b_i]$  が  $s$  に到達する途中で  
 区間の右端(「大きい方」)が  
 $s$  と  $t$  の間に入るときがあるはず

$a_i$  は「小さい方」  
 $b_i$  は「大きい方」に入る

$[a_i, b_i]$  の極限 = 実数  $s$

$$\left[ \begin{array}{c|c} a_i & b_i \\ \hline a_i & b_i \\ a_i & b_i \end{array} \right] \begin{array}{c} s \\ t \end{array}$$

$s$  は「小さい方」の最大値である  
 「大きい方」に最小値はない

$t$  は「大きい方」に属する

→  $s$  は切断の切り口で、「小さい方」にある

## 実数の連続性を示すさまざまな公理

カントールの公理 実数は入れ子の閉区間の極限

デデキントの切断による公理 実数は切断の「切り口」

ワイエルシュトラスの定理

実数の集合が有界ならば, 上限か下限がある

実数の有界な単調数列は収束する (これは次回)

いずれも同値である

## 連続性裁判

~こんな数学, 何か役に立つの?~ 😊

## 連続性裁判

映画の著作権

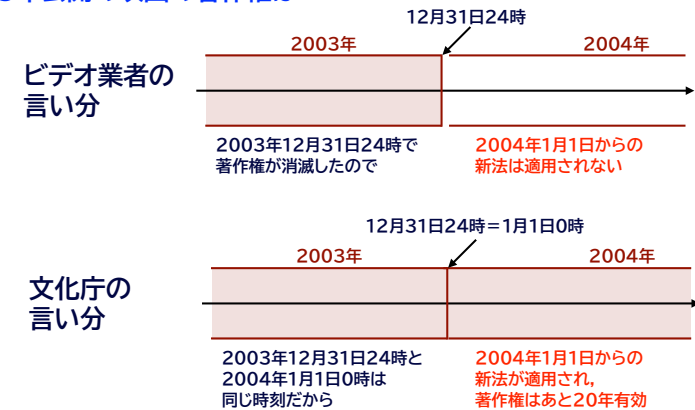
公開から50年後の年の年末まで有効

→2004年1月1日から「70年」に延長

1953年公開の映画の著作権は  
50年後の2003年末で消滅?

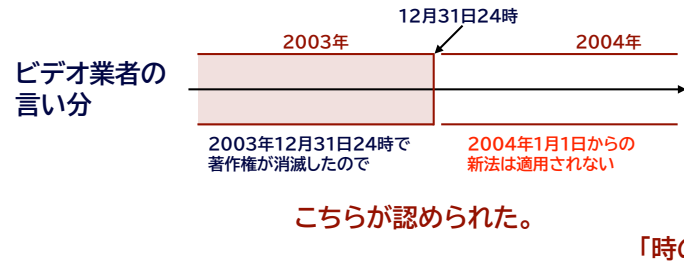
## 連続性裁判

1953年公開の映画の著作権は



## 裁判の結果は

「2003年12月31日24時」と「2004年1月1日0時」の  
2つの名前が同じ時刻をさすことはない



## 今日のまとめ

実数の「連続性」

実数の連続性を示す方法

- カントールの公理
- デデキントの切断による公理
- ワイエルシュトラスの定理