2023年度秋学期 応用数学(解析)　第5回

第2部・基本的な微分方程式 微分方程式とは・変数分離形

浅野 晃
関西大学総合情報学部

微分方程式とは🤔

微分方程式とは

ふつうの方程式は，解は「数」　$x^2 - 5x + 3 = 0$

微分方程式は，解が「関数」で，その微分が含まれる方程式

x が t の関数（つまり$x(t)$）のとき，

$x' = x$　　関数は「量の変化」

$x'' - 5x' + 6x = 0$　　微分方程式は「変化の条件」

微分方程式を解くと，「どう変化するか」がわかる

1階・2階，常微分・偏微分

1階導関数に関する微分方程式：
1階微分方程式　$x' = x$

2階導関数に関する微分方程式：
2階微分方程式　$x'' - 5x' + 6x = 0$

⋮

1変数関数の微分方程式は常微分方程式
2変数以上の関数の偏微分に関する
微分方程式は偏微分方程式

微分方程式を解くとは

微分方程式を「解く」とは，
その方程式を満たす関数を見つけること

微分方程式は
特定のパターンのものしか解けない

解ける微分方程式のうち，簡単なものの
基本的なパターンをいくつか紹介します。

微分方程式の例🤔

運動方程式

物体に働く力と，その運動との関係

力 F
物体の質量 m
物体の加速度 a

$$F = ma$$

加速度は速度の微分，
速度は位置の微分だから，
時刻 t の物体の位置を $x(t)$ とすると $F = mx''$

これを解いて関数 $x(t)$ を求めると，時刻 t での物体の位置がわかる

落下の問題

物体が空気中を落下するとき

力 F ＝下向きの重力 mg ＋ 上向きの抵抗力

抵抗力は速度の2乗に比例する $-k(x')^2$

運動方程式は $F = mx''$ なので $mg - k(x')^2 = mx''$

放射性物質の崩壊

崩壊の速度は，現在存在する物質の量に比例する

時刻 t の時点で存在する物質の量を $x(t)$ とすると

$$x' = -kx$$

一般解・特殊解・特異解🤔

一般解と特殊解

時刻 t の時点で存在する物質の量を $x(t)$ とすると $x' = -kx$

定数 k が決まったら，解はひとつの関数に決まるか？

初期値という

決まらない

最初 $t = 0$ に存在する物質の量 $x(0)$ が
わからないと解はひとつに決まらない

一般解と特殊解

初期値が定まったときに求められる解を
特殊解(particular solution)
という

初期値が定まっていないとき，
初期値を代入したらひとつの特殊解が求められるような形の解を
一般解(general solution)
という

初期値が定まってはじめて決まる
パラメータ

一般解の例： $x(t) = C\exp(-kt)$

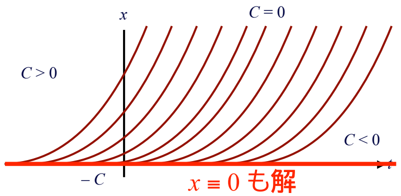
特異解と解の一意性

$x' = x^{\frac{1}{3}}$ の一般解　$x = \{\frac{2}{3}(t + C)\}^{\frac{3}{2}}$　（C は定数）

（なぜならば）　$x' = \frac{3}{2}\{\frac{2}{3}(t + C)\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}$

$= \{\frac{2}{3}(t + C)\}^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}}$

一般解　$x = \{\frac{2}{3}(t + C)\}^{\frac{3}{2}}$



でも，$x \equiv 0$ も解では？

一般解 $x = \{\frac{2}{3}(t + C)\}^{\frac{3}{2}}$ には

Cをどう変えても含まれない

特異解（singular solution）という

特異解と解の一意性

初期値がひとつ定まったときに，解がひとつだけに決まることを，
解が一意（unique）であるという

一意性の十分条件のひとつ「リプシッツ条件」

微分方程式が $x'(t) = f(t, x)$ のとき，初期値のまわりでどんな x_1, x_2 についても

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqq L|x_1 - x_2|$$

となる定数 L があるなら，その初期値について一意

「x のわずかな変化について，
f がいくらでも大きく変化する，ということはない」くらいの意味

変数分離形🤔

変数分離形

$x' = -kx$ を解く

$\frac{dx}{dt} = -kx$ と直す　$x \neq 0$ として　$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -k$ と変形する

両辺を t で積分　$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int (-k)dt$

置換積分をする　$\int \frac{1}{x}dx = \int (-k)dt$

積分を解く　$\int \frac{1}{x}dx = -\int k dt$

$\log|x| + C_1 = -kt + C_2$　C_1, C_2は積分定数

変数分離形

$x' = -kx$ を解く

積分を解く
$$\int \frac{1}{x}dx = -\int k dt$$
$$\log|x| + C_1 = -kt + C_2$$
$$\log|x| = -kt + (C_2 - C_1)$$
$$x = \pm\exp\{-kt + (C_2 - C_1)\}$$
$$x = \pm\exp(C_2 - C_1)\exp(-kt)$$

$\pm\exp(C_2 - C_1)$ をあらためて定数 C とすると　一般解は $x(t) = C\exp(-kt)$

さっき $x \neq 0$ としたが，　$x \equiv 0$ も解で，一般解に含まれる。

変数分離形

$x' = -kx$ を解くとき，ふつうは

$\dfrac{dx}{dt} = -kx$ から　$\dfrac{dx}{x} = -kdt$　と，分数の計算のように変形し

$\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \int(-k)dt$ と積分する

x が左辺，t が右辺に分離しているので，変数分離形という

変数分離形

一般には　$g(x)x' = f(t)$

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ とすると　$g(x)dx = f(t)dt$

両辺それぞれを積分すると　$\displaystyle\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$

一般解に含まれる積分定数 C は，
初期値を代入して定まり，特殊解が得られる

例題💡

例題

$9x \cdot x' + 4t = 0$ を解いて　一般解を求めよ。
$x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めよ。

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ として変数分離すると　$9x\,dx = -4t\,dt$

両辺それぞれを積分すると　$\dfrac{9}{2}x^2 = -2t^2 + C_0$

すなわち　$\dfrac{t^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = C_1$　（ $t-x$ 平面の楕円群）

例題

$9x \cdot x' + 4t = 0$ を解いて　一般解を求めよ。
$x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めよ。

一般解は　$\dfrac{t^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = C_1$

初期値が $x(3) = 2$ なので
$t = 3$ のとき $x = 2$ だから，代入すると $C_1 = 2$

特殊解は　$\dfrac{t^2}{9} + \dfrac{x^2}{4} = 2$

演習問題(1)

微分方程式　$x' = 3t^2 x$　について
$x(0) = 1$　とするときの特殊解を求めよ。

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ とすると $\dfrac{dx}{dt} = 3t^2 x$，すなわち $\dfrac{dx}{x} = 3t^2 dt$ と変数分離できる

両辺それぞれを積分すると

$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int 3t^2 dt$，すなわち $\log|x| = t^3 + C$（C は定数）

演習問題(1)

微分方程式　$x' = 3t^2 x$　について
$x(0) = 1$　とするときの特殊解を求めよ。

$\log|x| = t^3 + C$ より $x = \pm e^C e^{t^3}$（C は定数）

よって，$\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと，一般解は $x = Ae^{t^3}$

初期値は $x(0) = 1$ なので，$t = 0,\ x = 1$ を代入すると $1 = A$

よって，求める特殊解は $x = e^{t^3}$

今日のまとめ

微分方程式は，関数とその微分に関する方程式
解は数ではなく関数

解ける方程式のパターンは限られている

もっとも基本的なパターン
「変数分離形」