2023年度秋学期 応用数学(解析) 第6回

第2部・基本的な微分方程式 **変数分離形の変形**

浅野 晃
関西大学総合情報学部

変数分離形(復習)🤔

変数分離形

一般には $g(x)x' = f(t)$

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ とすると $g(x)dx = f(t)dt$

両辺それぞれを積分すると $\displaystyle\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$

一般解に含まれる積分定数 C は,
初期値を代入して定まり, 特殊解が得られる

今日は, 変形によって変数分離形に持ち込める方程式です

---

1. 同次形🤔

同次形

一般には $\dfrac{dx}{dt} = f(\dfrac{x}{t})$　　x/t の式になっている

$\dfrac{x}{t} = u$ とおくと　$x = ut$　この両辺を微分　$\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$

積の微分

よって　$t\dfrac{du}{dt} + u = f(u)$

$$\frac{1}{f(u) - u}du = \frac{1}{t}dt$$

変数分離形になった

同次関数

関数 $M(x,t)$ が k 次の同次関数であるとは

$M(ut,t) = t^k M(u,1)$ の形になっていること　t^k をくくり出せる

微分方程式が $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{M(x,t)}{N(x,t)}$ の形で

M, N がどちらも k 次の同次関数なら，$x = ut$ とおいて

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{M(x,t)}{N(x,t)} \\ &= \frac{t^k M(u,1)}{t^k N(u,1)} = \frac{M(u,1)}{N(u,1)} = \frac{M(\frac{x}{t},1)}{N(\frac{x}{t},1)}\end{aligned}$$

前ページの形になる

例題

$x' = \dfrac{t-x}{t+x}$ を解いて，一般解を求めよ。

分母分子を t でわると $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1-\frac{x}{t}}{1+\frac{x}{t}}$　【同次形】

$\dfrac{x}{t} = u$ とおくと　$x = ut$　より　$\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$

よって　$t\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{1-u}{1+u}$

$$\frac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u}du = \frac{1}{t}dt$$

t と u を分離

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\frac{1}{t}dt$$

例題（続き）

$x' = \dfrac{t-x}{t+x}$ を解いて，一般解を求めよ。

微分の関係になっている

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\frac{1}{t}dt$$

ここで $u^2 + 2u - 1$ の微分が $2(u+1)$になるから，上の式の両辺を積分すると

$$\frac{1}{2}\log(|u^2+2u-1|) = -\log|t| + C$$

対数の和 → 真数の積

$$\log(|u^2+2u-1|) = \log(A|t|^{-2})$$

対数の○倍 → 真数の○乗

$$t^2(u^2+2u-1) = A$$

定数は任意なので，絶対値が外れる

$u = \dfrac{x}{t}$ に戻すと $x^2 + 2tx - t^2 = A$

2. 1階線形🤔

1階線形微分方程式

一般には $\dfrac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ の形になっているもの

$p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ と置くと，一般解は $x = \dfrac{1}{p(t)}\left(\int p(t)Q(t)dt + C\right)$

なぜならば

$$
\begin{aligned}
(p(t)x)' &= (p(t))'x + p(t)x' && \text{積の微分} \\
&= \left[\exp\left(\int P(t)dt\right)\right]' x + p(t)x' \\
&= p(t)P(t)x + p(t)x' && \text{指数の合成関数の微分} \\
&= p(t)\left\{P(t)x + x'\right\} = p(t)Q(t)
\end{aligned}
$$

よって，両辺を積分して $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$

例題

$x' + x = t$ を解いて，一般解を求めよ。

$\dfrac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると $P(t) \equiv 1,\ Q(t) = t$

よって $p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ とすると $p(t) = \exp\left(\int 1dt\right)$

$$= e^{t+C_1} = e^{C_1}e^t$$

$$= C_2e^t$$

前ページの式から $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$

$$C_2e^tx = \int C_2e^ttdt + C_3$$

$$\frac{C_3}{C_2} = C \longrightarrow e^tx = \int e^ttdt + C$$

部分積分

$$= e^tt - \int e^tdt + C$$

$$= e^tt - e^t + C$$

よって

$$x = t - 1 + Ce^{-t}$$

2′．ベルヌーイの微分方程式🤔

ベルヌーイの微分方程式

一般には $\dfrac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$ の形 $(n \neq 1)$

$u = x^{1-n}$ とおくと1階線形微分方程式に変形できる

なぜならば

$\dfrac{1}{x}x' + P(t) = Q(t)x^{n-1}$　　$\log u = (1-n)\log x$

両辺を微分する

代入

$\dfrac{u'}{u} = (1-n)\dfrac{x'}{x}$

$\dfrac{1}{1-n}\dfrac{u'}{u} + P(t) = Q(t)\dfrac{1}{u}$

$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)Q(t)$　1階線形

例題

$x' + tx = tx^2$ が1階線形微分方程式で表せることを示せ。

$u = x^{-1}$ とおく

両辺の対数をとると　$\log u = -\log x$

両辺を t で微分すると $\dfrac{u'}{u} = -\dfrac{x'}{x}$

両辺を x で割ると $\dfrac{x'}{x} + t = tx$

$-\dfrac{u'}{u} + t = \dfrac{t}{u} \xrightarrow{-u\text{ 倍}} u' - tu = -t$　1階線形

演習問題(1)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

与式の右辺の分母分子を t で割ると, $x' = \dfrac{\frac{x}{t}-1}{2}$ となるので,

同次形の微分方程式

$\dfrac{x}{t} = u$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u-1}{2}$

$x = ut$ なので $\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$

$t\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{u-1}{2}$

演習問題(1)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$t\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{u-1}{2}$ より $t\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u+1}{2}$ なので

$\dfrac{du}{u+1} = -\dfrac{dt}{2t}$ と変数分離できる

両辺を積分すると $\displaystyle\int \frac{du}{u+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$

演習問題(1)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$\displaystyle\int \frac{du}{u+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$ より

$\log|u+1| = -\dfrac{1}{2}\log|t| + C$ （C は定数）

$\log|t|^{-\frac{1}{2}}$ と表せる　$\log e^{C}$ と表せる

$u+1 = \pm e^{C}|t|^{-\frac{1}{2}}$

$\pm e^{C} = A$ とおくと $u+1 = A|t|^{-\frac{1}{2}}$

演習問題(1)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$u+1 = A|t|^{-\frac{1}{2}}$ より $u = -1 + A\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおいていたので，これを代入すると $\dfrac{x}{t} = -1 + A\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$

すなわち，一般解は $x = -t + A\sqrt{|t|}$

今日のまとめ

同次形
1階線形
ベルヌーイ