

1. 与式の右辺の分母分子を  $t$  で割ると  $x' = \frac{\frac{x}{t} - 1}{2}$  となるので、同次形の微分方程式です。よって  $\frac{x}{t} = u$  とおくと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= t \frac{du}{dt} + u = \frac{u-1}{2} \\ t \frac{du}{dt} &= -\frac{u+1}{2} \\ \frac{du}{u+1} &= -\frac{dt}{2t} \\ \int \frac{du}{u+1} &= -\int \frac{dt}{2t} \\ \log|u+1| &= -\frac{1}{2} \log|t| + C \quad (C \text{ は定数}) \\ u+1 &= \pm e^C |t|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{A1}$$

よって、 $\pm e^C$  をあらためて定数  $A$  とおくと、 $u = -1 + A \frac{1}{\sqrt{|t|}}$  が得られます。ここで  $u = \frac{x}{t}$  を代入すると、一般解は  $x = -t + A\sqrt{|t|}$  となります。■

2. 与式より  $x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{t}$  と変形でき、これを 1 階線型微分方程式の一般形  $x' + P(t)x = Q(t)$  にあてはめると  $P(t) = -\frac{1}{t}$ ,  $Q(t) = \frac{1}{t}$  となります。よって、 $C_1, C_2$  を定数として

$$\begin{aligned} p(t) &= \exp\left(-\int \frac{1}{t} dt\right) \\ &= \exp(-\log t + C_1) \\ &= \exp(\log t^{-1}) + C_1 \\ &= \exp(\log t^{-1}) \exp(C_1) \\ &= C_2 \frac{1}{t} \end{aligned} \tag{A2}$$

となります。したがって、一般解は  $C$  を定数として

$$\begin{aligned} C_2 \frac{1}{t} x &= \int C_2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} dt \\ \frac{1}{t} x &= \int \frac{1}{t^2} dt \\ \frac{1}{t} x &= -\frac{1}{t} + C \\ x &= -1 + Ct \end{aligned} \tag{A3}$$

となります。■

3. 与式は Bernoulli の微分方程式で、その一般形  $x' + P(t)x = Q(t)x^n$  にあてはめると  $P(t) \equiv 1$ ,  $Q(t) = t$ ,  $n = 2$  です。したがって、 $u = \frac{1}{x}$  とおくと、 $u' - u = -t$  と変形できます。この方程

式は1階線形微分方程式で、 $p(t) = \exp(\int(-1)dt) = e^{-t}$ とおくと、 $(p(t)u)' = p(t)(-t)$ がなりたつことから

$$\begin{aligned}(e^{-t}u)' &= -te^{-t} \\ e^{-t}u &= -\int te^{-t}dt \\ e^{-t}u &= -\left[-te^{-t} + \int e^{-t}dt\right] \\ e^{-t}u &= te^{-t} + e^{-t} + C \quad (C \text{ は定数})\end{aligned}\tag{A4}$$

よって  $u = t + 1 + Ce^t$  で、 $u = \frac{1}{x}$  ですから一般解は  $x = \frac{1}{t + 1 + Ce^t}$  となります。■