



2階線形微分方程式とは🤔

2階線形微分方程式

一般には $x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$
ここが恒等的に0なのが[斉次]
そうではないのが[非斉次]

一番簡単なのは $x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次方程式

とりあえず, $x \equiv 0$ は解[自明解]

それ以外には?

2階線形微分方程式の解

とりあえず $x'' + ax' + bx = 0$ に $x(t) = e^{\lambda t}$ を代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) e^{\lambda t} = 0$$

ここが0になるような λ については
 $x = e^{\lambda t}$ は解, その定数倍も解

λ の2次方程式だから, みます λ はたいてい2つ λ_1, λ_2

一般解は $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ $x \equiv 0$ を含む

おわり😓

こんなんでいいのか？🌀

本当に一般解であるためには

$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ が本当に一般解であることは、
以下の2項目が正しいことと同じ

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると、特殊解はひとつに定まる
初期値はこの2つ

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば、
一般解は $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ で表される

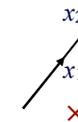
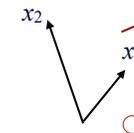
本当に一般解であるためには

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば、
一般解は $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ で表される

2つの関数が1次独立とは

$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ がどんな t についても
なりたつのは、 $C_1 = C_2 = 0$ のときだけ



解全体は
2次元ベクトル空間をなす

本当に一般解であるためには

1. 解が一意
2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

さっきの例では

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ は $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら1次独立

一般解は $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ だけで、他にはない

一般の斉次形 n 階線形微分方程式
(定数係数でない場合も含む)についてなりたつ

定数係数の場合に、証明してみる

行列で表現する

$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$ を, $x_1 = x, x_2 = x'$ とおいて

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t) \end{aligned} \quad \text{と表す}$$

行列で
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

1階線形微分方程式の形になる
何階線形微分方程式でも、この形にできる

条件1の証明の概略

1. 解が一意
初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると、特殊解はひとつに定まる

リプシッツ条件をつかう

特異解と解の一意性

初期値がひとつ定まったときに、解がひとつだけに決まることを、
解が一意(unique)であるという

一意性の十分条件のひとつ「リプシッツ条件」

微分方程式が $x'(t) = f(t, x)$ のとき、初期値のまわりでどんな x_1, x_2 についても

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

となる定数 L があるなら、その初期値について一意

x のわずかな変化について、
 f がいくらでも大きく変化する、ということはない

条件1の証明の概略

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると, 特殊解はひとつに定まる

リップシッツ条件をつかう

$x' = A(t)x + b(t)$ の右辺について, 関数 x, y を考えると

$$\|(A(t)x + b(t)) - (A(t)y + b(t))\| = \|A(t)x - A(t)y\| \text{ であり,}$$

$$\|A(t)x - A(t)y\| \leq (\|A(t)\|)\|x - y\| \text{ となるようなノルムが存在する}$$

ユークリッドノルムならそうなる

ノルムが連続なら, 任意の有界閉区間で上限が存在する

リップシッツ条件が成り立ち, 一意

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば,
一般解は $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ で表される

斉次形の場合を考える $x' = A(t)x$ テキストは n 階の場合を示しているが,
ここでは2階の場合を示す

まず,

一般解を $x(t)$ とするとき

$t = t_0$ のときの初期値は $x(t_0) = x_1e_1 + x_2e_2$ の形で表せる

$e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ は, 2次元の基本ベクトル

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

$x' = A(t)x$ の特殊解を, 2つ考える

初期値 $x(t_0) = e_1$ をみたくもの $\xi_1(t)$ $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$

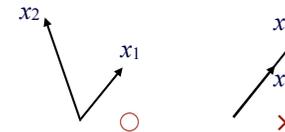
初期値 $x(t_0) = e_2$ をみたくもの $\xi_2(t)$ は, 2次元の基本ベクトル

この特殊解 $\xi_1(t), \xi_2(t)$ は, 1次独立。本当?

2つの関数が1次独立とは

2つの関数が1次独立とは

$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) = 0$ がどんな t についても
なりたつのは, $C_1 = C_2 = 0$ のときだけ



条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

$x' = A(t)x$ の特殊解を, 2つ考える

初期値 $x(t_0) = e_1$ をみたすもの $\xi_1(t)$

初期値 $x(t_0) = e_2$ をみたすもの $\xi_2(t)$

$e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$
は, 2次元の基本ベクトル

この特殊解 $\xi_1(t), \xi_2(t)$ は, 1次独立である

$\therefore c_1 \xi_1(t) + c_2 \xi_2(t) = 0$ が任意の t についてなりたつとする
 $t = t_0$ のときも当然なりたつ

$c_1 \xi_1(t_0) + c_2 \xi_2(t_0) = 0$ e_1, e_2 は1次独立だから

$c_1 e_1 + c_2 e_2 = 0$ ← これがなりたつのは $c_1 = c_2 = 0$ に限る

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

初期値 $x(t_0) = e_1$ をみたす $\xi_1(t)$

初期値 $x(t_0) = e_2$ をみたす $\xi_2(t)$

一般解を $x(t)$ とするとき

$t = t_0$ のときの初期値は $x(t_0) = x_1 e_1 + x_2 e_2$ の形で表せる

特殊解の1次結合 $x_1 \xi_1(t) + x_2 \xi_2(t)$ を考えると

$t = t_0$ のとき $x_1 e_1 + x_2 e_2$

• 一般解で表された $x(t)$

どちらも同じ初期値をもつ

• 特殊解の1次結合 $x_1 \xi_1(t) + x_2 \xi_2(t)$

一意だから, それらは同じ解である

$x(t) = x_1 \xi_1(t) + x_2 \xi_2(t)$

定数係数の 斉次形2階線形微分方程式を解く💡

2階線形微分方程式を解く

$x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の
斉次形2階線形微分方程式

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ をみたす λ について $x = e^{\lambda t}$ は解
特性方程式という

特性方程式の解の形によって, 3パターン

- 異なる2つの実数解の場合
- 異なる2つの虚数解の場合
- 重解の場合

実数解が2つの場合

特性方程式の異なる2つの実数解 λ_1, λ_2

微分方程式の1次独立な解 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

一般解は $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

(つまり, 最初のとおりに)

虚数解が2つの場合

一般解は $x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$

さらに計算すると

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}) \\ &= e^{\alpha t} (C_1 (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + C_2 (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))) \\ &= e^{\alpha t} ((C_1 + C_2) \cos(\beta t) + i(C_1 - C_2) \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

なぜ三角関数になるのかは、
また先で

定数を置き直して, 一般解は

$$x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \quad \text{振動を表している} \quad \text{これも先で}$$

重解の場合

ふつうにやると, 微分方程式の解は $C_1 e^{\lambda_1 t}$ しか出て来ない

これと1次独立なもうひとつの解は $t e^{\lambda_1 t}$

確かめるため, 解を微分して, 微分方程式に代入してみる

$$(t e^{\lambda_1 t})' = \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 t + 1) e^{\lambda_1 t}$$

$$(t e^{\lambda_1 t})'' = \lambda_1 (\lambda_1 t + 1) e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1) e^{\lambda_1 t}$$

微分方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} &(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1) e^{\lambda_1 t} + a \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + b t e^{\lambda_1 t} \\ &= \{ \lambda_1^2 + a \lambda_1 + b \} t e^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a) e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

λ_1 は特性方程式の解
だから0

特性方程式の
解と係数の関係により0

一般解は

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$$

見つけ方はテキストで(定数変化法)

例題 🤔

例題

$x'' - 5x' + 6x = 0$ を解いて、
初期値 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ での特殊解を求めよ。

特性方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ その解は $\lambda = 2, 3$

異なる2つの実数解なので、微分方程式の一般解は

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

初期条件から

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$x'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 0$$



$$C_1 = 3, C_2 = -2$$

よって、求める特殊解は

$$x(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}$$

今日のまとめ

定数係数・斉次形の
2階線形微分方程式 $x'' + ax' + bx = 0$

今回は非斉次形
(右辺が0でない)をやります