2023年度秋学期 応用数学(解析)　第8回

第2部・基本的な微分方程式　2階線形微分方程式(2)

浅野 晃
関西大学総合情報学部

2階線形微分方程式(復習)🤔

2階線形微分方程式

一般には　$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$

ここが恒等的に0なのが[斉次]
そうではないのが[非斉次]

一番簡単なのは　$x'' + ax' + bx = 0$　定数係数の斉次方程式

とりあえず，$x \equiv 0$ は解[自明解]

それ以外には？

2階線形微分方程式の解

とりあえず　$x'' + ax' + bx = 0$　に　$x(t) = e^{\lambda t}$　を代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$

$$\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) e^{\lambda t} = 0$$

ここが 0 になるような λ については
$x = e^{\lambda t}$ は解，その定数倍も解

λ の2次方程式だから，みたす λ はたいてい2つ　λ_1, λ_2

一般解は $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$　　$x \equiv 0$ を含む

2階線形微分方程式を解く

$x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の
斉次形2階線形微分方程式

$\underline{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$ をみたす λ について $x = e^{\lambda t}$ は解
特性方程式という

特性方程式の解の形によって，3パターン

異なる2つの実数解の場合
異なる2つの虚数解の場合
重解の場合

実数解が2つの場合

特性方程式の
異なる2つの実数解 λ_1, λ_2

微分方程式の
1次独立な解 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

一般解は $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

（つまり，最初のとおり）

虚数解が2つの場合

一般解は $x(t) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$

さらに計算すると

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\
&= e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left(C_1(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + C_2(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))\right) \\
&= e^{\alpha t}\left((C_1 + C_2)\cos(\beta t) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta t)\right)
\end{aligned}$$

オイラーの式
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ による
（また先で）

定数を置き直して，一般解は
$x(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t))$ 振動を表している （次の第3部で）

重解の場合

ふつうにやると，微分方程式の解は $C_1 e^{\lambda_1 t}$ しか出て来ない

これと1次独立なもうひとつの解は $te^{\lambda_1 t}$

確かめるため，解を微分して，微分方程式に代入してみる

$$(te^{\lambda_1 t})' = \lambda_1 te^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t}$$
$$(te^{\lambda_1 t})'' = \lambda_1(\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t}$$

微分方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 te^{\lambda_1 t} + bte^{\lambda_1 t} \\
&= \{\underline{\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b}\}te^{\lambda_1 t} + \underline{(2\lambda_1 + a)}e^{\lambda_1 t}
\end{aligned}$$

λ_1は特性方程式の解
だから0

特性方程式の
解と係数の関係により0

一般解は
$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 te^{\lambda_1 t}$

見つけ方は前回のテキストで
（定数変化法）

非斉次形
2階線形微分方程式🤔

非斉次形2階線形微分方程式

前回のは $x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次方程式

今回は $x''+ax'+bx = \underline{R(t)}$

[非斉次]tの式

非斉次形2階線形微分方程式

前回のは $x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次方程式

今回は $x''+ax'+bx = \underline{R(t)}$ [非斉次]tの式

結論からいうと

非斉次形の一般解 ＝

非斉次形の特殊解なにかひとつ(何でもいい)

＋ 対応する斉次形の一般解

一般的にいうと

$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$ を, $x_1 = x, x_2 = x'$ とおいて

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t) \end{aligned}$$ と表す

行列で $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

1階線形微分方程式の形になる

何階線形微分方程式でも, この形にできる

一般的にいうと

非斉次形 n 階線形微分方程式

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ の一般解 $\boldsymbol{x}_s(t)$ は

非斉次形方程式

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ の任意の特殊解 $\boldsymbol{x}_p(t)$ と

対応する斉次形方程式

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の一般解 $\boldsymbol{x}_h(t)$ の　和で表される。

$$\boldsymbol{x}_s(t) = \boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t)$$

何階微分方程式でも
定数係数でなくても

証明は, 割と簡単

まず $\boldsymbol{x}_s(t) = \boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t)$ が

非斉次形方程式 $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ の解であることを確かめる

右辺に $\boldsymbol{x}_s(t) = \boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t)$ を代入

$$
\begin{aligned}
&A(t)\boldsymbol{x}_s(t) + \boldsymbol{b}(t)\\
&= A(t)\left(\boldsymbol{x}_h(t) + \boldsymbol{x}_p(t)\right) + \boldsymbol{b}(t)\\
&= \left(A(t)\boldsymbol{x}_h(t)\right) + \left(A(t)\boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{b}(t)\right)\\
&= (\boldsymbol{x}_h(t))' + (\boldsymbol{x}_p(t))' = (\boldsymbol{x}_s(t))'
\end{aligned}
$$

斉次形 $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$

非斉次形 $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$

（左辺）

本当に一般解か？
どんな初期値に対する特殊解でも表せるか？

証明は, 割と簡単

どんな初期値に対する特殊解でも表せるか？

非斉次形方程式 $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ の一般解 $\boldsymbol{x}_s(t)$ について
任意の初期値 $\boldsymbol{x}_s(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ を考える

このとき, 対応する斉次形方程式 $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の一般解 $\boldsymbol{x}_h(t)$ について

初期値を $\boldsymbol{x}_h(t_0) = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_p(t_0)$ にとれば

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_s(t_0) &= \boldsymbol{x}_h(t_0) + \boldsymbol{x}_p(t_0)\\
&= (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_p(t_0)) + \boldsymbol{x}_p(t_0)\\
&= \boldsymbol{x}_0
\end{aligned}
$$

だから, これで
非斉次形方程式の解で初期値を $\boldsymbol{x}_s(t_0) = \boldsymbol{x}_0$
としたことになっている

この斉次形方程式は一意だから,
斉次形方程式でこの初期値の特殊解はひとつ　非斉次形方程式の特殊解もひとつ

例題🤔

非斉次形2階線形微分方程式

前回のは $x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次方程式

今回は $x''+ax'+bx = R(t)$ [非斉次]tの式

結論からいうと

非斉次形の一般解 ＝ これを見つけるには，右辺の形に注目

非斉次形の特殊解なにかひとつ(何でもいい)

＋ 対応する斉次形の一般解

例題

$x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 3t - 2$ の一般解を求めよ。

特殊解を，$x = at^2 + bt + c$ と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$$-(3a+3)t^2 + (4a-3b-3)t + (2a+2b-3c+2) = 0$$

これが t に関係なくなりたつから

$$\begin{cases} 3a+3 &= 0 \\ 4a-3b-3 &= 0 \\ 2a+2b-3c+2 &= 0 \end{cases}$$

これを解くと $a = -1,\ b = -\frac{7}{3},\ c = -\frac{14}{9}$

非斉次形の方程式の特殊解(のひとつ)は $x = -t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$

例題

$x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 3t - 2$ の一般解を求めよ。

非斉次形の特殊解(のひとつ)は $x = -t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$

対応する斉次形の方程式は $x'' + 2x' - 3x = 0$

特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ その解は $\lambda = 1, -3$

異なる2つの実数解なので，斉次形方程式の一般解は $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

以上から，与えられた非斉次形方程式の一般解は

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} - t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$$

例題

$x'' + 2x' - 3x = e^{2t}$ の一般解を求めよ。

特殊解を，$x = ae^{2t}$ と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$$4ae^{2t} + 2 \cdot 2ae^{2t} - 3ae^{2t} = e^{2t}$$
$$5ae^{2t} = e^{2t}$$

これが t に関係なくなりたつから $a = \frac{1}{5}$

非斉次形の方程式の特殊解(のひとつ)は $x = \frac{1}{5}e^{2t}$

対応する斉次形の方程式は $x'' + 2x' - 3x = 0$ 一般解は $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

以上から，非斉次形方程式の一般解は $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$

例題

$x'' + 2x' - 3x = 2\cos t$ の一般解を求めよ。

特殊解を, $x = A\cos t + B\sin t$ と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$(-4A + 2B - 2)\cos t + (-2A - 4B)\sin t = 0$ cos, sinは独立(あとで説明)

$$\begin{cases} -4A + 2B - 2 &= 0 \\ -2A - 4B &= 0 \end{cases} \qquad A = -\frac{2}{5},\ B = \frac{1}{5}$$

非斉次形の方程式の特殊解(のひとつ)は $x = -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$

対応する斉次形の方程式は $x'' + 2x' - 3x = 0$ 一般解は $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

以上から, 非斉次形方程式の一般解は $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$

関数の1次独立とWronskian🤔

関数の1次独立とWronskian

関数 $x_1(t)$と $x_2(t)$が1次独立とは,

$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ が どんな t についてもなりたつなら, $C_1 = C_2 = 0$

ところで $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ を t で微分すると $C_1 x_1'(t) + C_2 x_2'(t) = 0$

まとめて行列で書くと $\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解が $C_1 = C_2 = 0$ だけになるのは, この行列に逆行列が存在する時

つまり $\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

Wronskianという

関数の1次独立とWronskian(例)

関数 $x_1(t)$と $x_2(t)$が1次独立とは,

$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ が どんな t についてもなりたつなら, $C_1 = C_2 = 0$

$\cos t$ と $\sin t$ は?

Wronskianは $\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ で, Wronskianが0でないので,

$\cos t$ と $\sin t$ は1次独立

今日のまとめ

定数係数・非斉次形の
2階線形微分方程式

$$x'' + ax' + bx = R(t)$$

非斉次形の一般解 ＝

非斉次形の特殊解なにかひとつ（何でもいい）

＋ 対応する斉次形の一般解

$$x'' + ax' + bx = 0$$

これを見つけるには右辺の形に注目