2023年度秋学期 応用数学(解析) 第10回

第3部・微分方程式に関する話題 生存時間分布と半減期

浅野 晃
関西大学総合情報学部

---

今日は,「寿命」を扱う微分方程式🤔



---

# 寿命は「確率変数」

人間の寿命は, 各個人によってばらばら

機械の寿命も, 同じ型でも個体によってばらばら

その理由は「偶然」

寿命は[確率変数]であるという

寿命がいくらである確率がどのくらいであるかを
表すのが[確率分布]



---

# 寿命の確率分布を考える

寿命を表す確率変数 $T$ (時刻0に誕生した人が死亡する時刻)

$$l(t) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} P(t < T < t+\Delta | T > t)$$

次の瞬間

単位時間
あたり

時刻 $t$ までは確かに生存している人が
時刻 $t$ 以後，時間Δの間に死亡する確率

$l(t)$ は

時刻tまで生存している人が
次の瞬間に死ぬ危険の度合 [ハザード関数]

## 累積分布関数と「生存関数」

確率変数 $T$ に対して $F(t) = P(T \le t)$　［累積分布関数］

この場合，寿命が $t$ 以下である確率

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t)$$　［生存関数］

時刻 $t$ の時点でまだ生きている確率

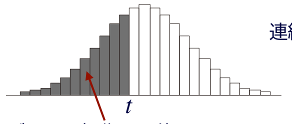
ハザード関数は「瞬間瞬間の死亡の危険」

生存関数は，ある時間がたったとき，まだ生きている確率



## （ところで）累積分布関数と確率密度関数

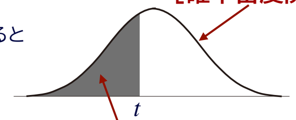
ヒストグラム 柱の面積が確率を表す



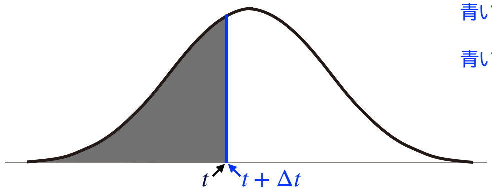

グレーの部分の面積 $P(T \le t)$

連続型になると

ヒストグラム（だったもの）の「へり」［確率密度関数］$f(t)$




グレーの部分の面積 $= P(T \le t)$　［累積分布関数］$F(t)$




青い部分 の面積 $= P(t \le T \le t + \Delta t) = F(t + \Delta t) - F(t)$

青い部分 の高さ $= \dfrac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$

その $\Delta t \to 0$ の極限 $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = F'(t)$

すなわち $f(t) = F'(t)$



## 生存関数とハザード関数

寿命 $T$　ハザード関数 $l(t)$　累積分布関数 $F(t)$

$$l(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} P(t < T < t + \Delta | T > t)$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P\{(t < T < t + \Delta) \text{ and } (T > t)\}}{P(T > t)}$$

含まれる

（条件付確率の定義）

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(t < T < t + \Delta)}{P(T > t)}$$

（累積分布関数の定義）

$F(t) = P(T \le t)$

$$= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta \to 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta}$$



## 生存関数とハザード関数

$$l(t) = \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta \to 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta}$$

（微分の定義）

$$= \frac{1}{P(T > t)} F'(t)$$

$f(t) = F'(t)$　（確率密度関数）

$$l(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

（生存関数の定義）

$S(t) = P(T > t)$

$S'(t) = (1 - F(t))' = -F'(t) = -f(t)$

以上から $l(t) = -\dfrac{S'(t)}{S(t)}$ という微分方程式が得られる

# 微分方程式を解く

$$l(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)}$$

$$= -\frac{d}{dt}(\log S(t))$$

(両辺を積分)

$$-\underbrace{\int_0^{\overset{0}{t}} l(u)du}_{0} = \underbrace{\log S(\overset{0}{t})}_{\substack{1 \\ 0}} + C \quad C = 0$$

時刻0, つまり誕生の瞬間に生存している確率は1
つまり $S(0) = 1$

$t = 0$ のとき $S(0) = 1$ だから

よって $S(t) = \exp\left(-\int_0^t l(u)du\right)$ という解が得られる

ハザード関数と生存関数の関係



# ワイブル分布と指数分布📈



# ワイブル分布

ハザード関数を $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ と仮定する

$S(t) = \exp\left(-\int_0^t l(u)du\right)$ に代入

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda p(\lambda u)^{p-1} du\right)$$

微積分の関係

$$= \exp\left(-[(\lambda u)^p]_{u=0}^{u=t}\right) = \exp\left(-(\lambda t)^p\right)$$

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - \exp\left(-(\lambda t)^p\right)$$

この形の累積分布関数をもつ確率分布を[ワイブル分布]とよぶ



# ワイブル分布のパラメータ

$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ パラメータは $\lambda$ と $p$

$\lambda$ が大きいと, ハザード関数が全体に大きくなる

死亡・故障する危険が
どの時刻でも大きくなる

$p > 1$ のときは, $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ の指数が正

時間が経つにつれて, 死亡・故障する危険が大きくなる ［摩耗故障］

$0 < p < 1$ のときは, $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ の指数が負

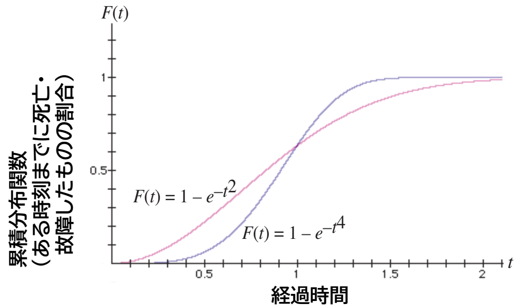
時間が経つにつれて, 死亡・故障する危険が小さくなる ［初期故障］

# ワイブル分布のパラメータ

$p=2$ の場合と $p=4$ の場合

どちらも摩耗故障（時間につれて故障しやすくなる）

$p=4$ のほうが，急激に故障が増える






# ワイブルプロット

実務では，たくさんの個体で耐久試験を行い，
ワイブル分布を仮定して，パラメータを推測する

$S(t) = \exp(-(\lambda t)^p)$ より $\dfrac{1}{S(t)} = \exp((\lambda t)^p)$

↓ 両辺の対数を2回とる

$$\underbrace{\log\left\{\log\left(\frac{1}{S(t)}\right)\right\}}_{Y} = \log\{\log(\exp((\lambda t)^p))\}$$
$$= \log\{(\lambda t)^p\}$$
$$= p(\underbrace{\log t}_{X} + \log\lambda)$$
$$Y = p(X + \log\lambda)$$

時刻を上の $X$，その時刻での生存割合を上の $Y$ に変換してプロット
→並びを近似する直線の傾きが $p$



# 指数分布

$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ で $p=1$ の場合

ハザード関数は $l(t) = \lambda$ 死亡・故障する危険が時刻によらず一定［偶発故障］

累積分布関数は $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ［指数分布］

生存関数は $S(t) = e^{-\lambda t}$

放射性原子核は，どの時刻においても，その時点で
存在する核のうち一定の割合が崩壊する
ハザード関数が一定で，指数分布にしたがう



# 半減期

ある時刻に存在する原子核の数が，その半分になるまでの時間は，
どの時刻でも一定

時刻 $t$ に存在する原子核の数が半分になる時刻を $t'$ とする

$$S(t') = \frac{1}{2}S(t)$$

指数分布の生存関数 $S(t) = e^{-\lambda t}$

$$e^{-\lambda t'} = \frac{1}{2}e^{-\lambda t}$$

対数をとる

$$-\lambda t' = -\log 2 - \lambda t$$

原子核の数が半分になるまでの時間 $t' - t = \dfrac{\log 2}{\lambda}$ $t$ によらず一定［半減期］

# 演習問題

ある原子核の半減期が2年であるとする
1年以内に崩壊する原子核の割合は？

時間 $t$ の単位を「年」とする

指数分布の生存関数を $S(t) = e^{-\lambda t}$ とおくと

半減期 $= \dfrac{\log 2}{\lambda}$　　半減期は2年なので $\lambda = \dfrac{\log 2}{2}$

求めるのは，指数分布の累積分布関数 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ において $F(1)$ の値



# 演習問題

ある原子核の半減期が2年であるとする
1年以内に崩壊する原子核の割合は？

求めるのは，指数分布の累積分布関数 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ において $F(1)$ の値

半減期は2年なので $\lambda = \dfrac{\log 2}{2}$

$$F(1) = 1 - e^{-\frac{\log 2}{2}\cdot 1} = 1 - e^{\log(2^{-\frac{1}{2}})} = 1 - 2^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \fallingdotseq 0.293$$

1個の原子が1年以内に崩壊する確率 0.293
原子がたくさんあれば，そのうち崩壊する原子の割合が 29.3%



# 今日のまとめ

集団中の個体の数が
死亡・故障によって減少して行く

この現象を表す
微分方程式

解に仮定を持ち込むことで，
ワイブル分布，指数分布といった
「死亡・故障による現象のモデル」が導かれる