2023年度秋学期 応用数学(解析) 第11回

第3部・微分方程式に関する話題

振動と微分方程式

浅野 晃
関西大学総合情報学部

今日は,「振動」を扱う微分方程式

振動とは

ある方向に進めば進むほど,
逆向きに進もうとする力が働く

ときにおきる運動

釣り合い位置から両方に往復を繰り返す

質点の運動方程式

質点＝質量はあるが大きさはない点

大きさがないので, 物体自身の回転などは考えなくてよい

ニュートンの運動方程式

$$F = mx'' = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

質点に働く力

質点の位置

質点の加速度

質点の質量

時刻

さまざまな振動について
力がどう表されるかを考える

単振動⚖️

単振動

もっとも単純な振動，復元力（下記）のみが働く

釣り合い位置にもどろうとする力［復元力］

原点を釣り合い位置とし，そこからの距離に比例する復元力が働くとすると

$$F = -kx$$

正の定数

位置

釣り合い位置からの方向の逆向きの力なのでマイナス

単振動の運動方程式

$F = mx''$より $\boxed{mx'' = -kx}$

$F = -kx$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくと

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

斉次形の2階線形微分方程式

特性方程式は $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ 虚数解 $\lambda = \pm i\omega_0$

一般解は $x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

単振動の運動方程式

$x'' + \omega_0^2 x = 0$ より $x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

位置 x は実数だから，C_1, C_2 とも実数でなければならない

三角関数を合成すると

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\phi = -\tan^{-1}(C_2/C_1)$

x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動 **単振動の式**

単振動の式

x 軸上で $[-A, A]$ の範囲を往復する振動

$$x = A\cos(\underline{\omega_0 t + \phi})$$

[振幅]

[角振動数(角周波数)]

時間が1秒進むと, $(\omega_0 t + \phi)$ が何ラジアン進むか

1往復とは, 2π ラジアン進むこと

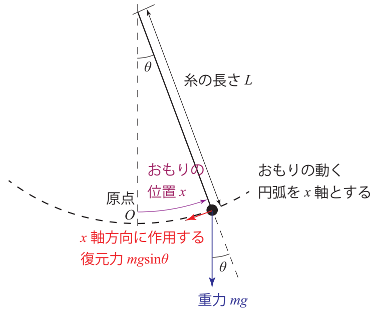
それに必要な時間は $2\pi/\omega_0$ [周期]

1秒間に何往復するか？

その回数は, 周期の逆数 $\omega_0/2\pi$

[振動数(周波数)]

単振り子は単振動か？



復元力は $-mg\sin\theta$

θ が小さいとき $\sin\theta$ は θ で近似できる

$\theta = x / L$ (ラジアン)なので,

復元力は $-(mg / L)\,x$

これを k とみれば
単振動

周期 $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{m\dfrac{L}{mg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

L と g だけで決まる
(振り子の等時性)

θ が小さい, つまり振れ幅が小さいときのみ成り立つ

減衰振動📉

減衰振動

復元力以外に, [抵抗力]がはたらく場合

運動が速いほど, それを妨げる力が働く 空気抵抗など

質点の速度は x' $\longrightarrow$ 抵抗力は $-ax'$

逆向きでマイナス 正の定数

運動方程式は

$$mx'' = -kx - ax'$$

$\mu = \dfrac{a}{2m}$ とおく [抵抗係数]

$$\xrightarrow[\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}]{} \quad x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0$$

減衰振動の運動方程式

$x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0$　これも斉次形の2階線形微分方程式

特性方程式は $\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0$　解 $\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$

$\mu^2 < \omega_0^2$ の場合を考える　抵抗力が比較的小さい場合

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\underbrace{\mu^2 - \omega_0^2}_{<0}}$$ は虚数解

微分方程式の解 $x = e^{-\mu t}(C_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t))$

三角関数を合成 $x = Ae^{-\mu t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}\ t + \phi)$

振幅が時間とともに小さくなる［減衰振動］

強制振動と共鳴🤔

強制振動

復元力に加えて，外部から[強制力]がはたらく場合

質点を，角振動数 ω で強制的に振動させる

復元力は $-kx$
強制力は $F\cos\omega t$

運動方程式は
$$mx'' = -kx + F\cos\omega t$$

$f = \dfrac{F}{m}$　$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$x'' + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$　これは非斉次形の2階線形微分方程式

強制振動の運動方程式

$x'' + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$

対応する斉次形の微分方程式は $x'' + \omega_0^2 x = 0$　単振動の式と同じ

一般解は $x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

特殊解をひとつ見つける

$x = C\cos\omega t$ を入れてみると $C(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t = f\cos\omega t$

よって，$\omega \neq \omega_0$ のとき $C = \dfrac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$

非斉次形の一般解は $x = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \dfrac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$

強制振動

[強制振動]の式　$x = \underbrace{A\cos(\omega_0 t + \phi)}_{\text{強制力のないときの振動 [固有振動]}} + \underbrace{\frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t}_{\text{強制振動}}$

強制力のないときの振動
[固有振動]

強制振動

ω_0　[固有角振動数]
$\omega_0/2\pi$　[固有振動数]

強制振動の角振動数 ω が固有角振動数 ω_0 に近づくと
強制振動の項が大きくなる

$\omega = \omega_0$ のときは発散する 💥

共鳴

$\omega = \omega_0$ のときは強制振動の項が発散する

もう一度もとの方程式に戻る　$x'' + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$

$x = t(C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t)$ と見当をつけて，
また右辺も $\omega = \omega_0$ としてそれぞれ代入すると

$$-2C_1\omega_0\sin\omega_0 t + 2C_2\omega_0\cos\omega_0 t = f\cos\omega_0 t$$

よって　$C_1 = 0, C_2 = \dfrac{f}{2\omega_0}$

解は　$x = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \dfrac{ft}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$

時間がたつと振動しながら発散する[共鳴]

問題🌀

問題

単振動において，
$t = 0$ のとき $x = 0, x' = v$ となるとき，運動方程式の特殊解を求めよ。

単振動の運動方程式の一般解は　$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

両辺を t で微分すると　$x' = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \phi)$

$t = 0$ のとき $x = 0, x' = v$ となるので

$x(0) = A\cos\phi = 0$ ⟶ $A = 0$ だと $x \equiv 0$
振動にならない　よって　$\cos\phi = 0$

$x'(0) = -A\omega_0\sin\phi = v$

問題

一般解 $x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ $x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

問題に示された初期値によると

$$x(0) = A\cos\phi = 0 \qquad x'(0) = -A\omega_0 \sin\phi = v$$

$\cos\phi = 0$ より $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ にできる　このとき $\sin\phi = 1$

つまり $-A\omega_0 = v$ $A = -\dfrac{v}{\omega_0}$

以上から，求める特殊解は

$$x = -\frac{v}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{v}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

今日のまとめ

振動を表す微分方程式

単振動

減衰振動

強制振動

2階線形微分方程式で表され，
それを解くと振動を表す式が得られる