

2023 年度秋学期 応用数学（解析） 第 11 回演習の解答例

単振動の時の一般解は $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ と表され、このとき $x'(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$ です。題意より $x(0) = A \cos \phi = 0$, $x'(0) = -A\omega_0 \sin \phi = v$ です。 $A = 0$ とすると $x \equiv 0$ となり、単振動になりません。そこで、 $\cos \phi = 0$ であり、 $\phi = \frac{\pi}{2}$ とすることができます。

$\phi = \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin \phi = 1$ ですから、 $x'(0) = -A\omega_0 \sin \phi = v$ より $-A\omega_0 = v$ となります。よって、 $A = -\frac{v}{\omega_0}$ です。

以上から、求める特殊解は $x = -\frac{v}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$, すなわち $x = \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ となります。