2023年度秋学期 応用数学(解析) 第12回

第4部・「その先の解析学」への導入

複素関数論ダイジェスト(1) 複素関数・正則関数

浅野 晃
関西大学総合情報学部

応用数学(解析)は

ここから先の”「その先の解析学」への導入”は,
「ちょっとかっこいい数学」への入口です

複素関数論ダイジェスト(2回)

測度論ダイジェスト(2回)

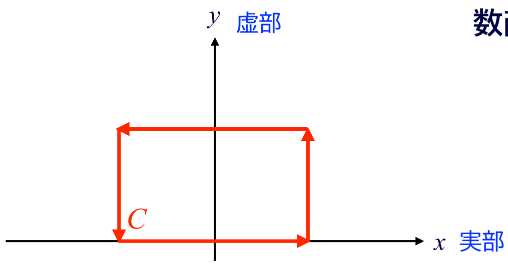
本来は, それぞれ半期15回をかけて学ぶ科目です🎓

ここでは, 「雰囲気💭」を説明します

「複素関数」で
いったい何をやろうというのか🤔

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$ まっとうには求められません。



そこで
数直線を 複素平面に拡張 $z = x + yi$

こういう周C上で
$\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz$ を計算すると
上の積分も求まる

複素数と複素関数🤔

複素数と複素関数

複素数 $z = x + yi$ （ x, y は実数, $i = \sqrt{-1}$ ）

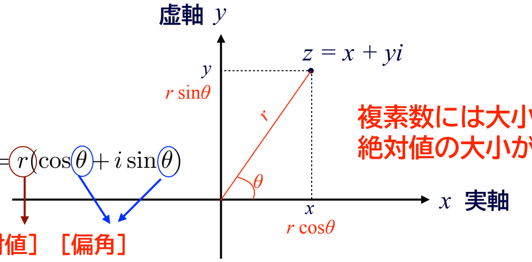
実部　虚部

複素数で定義された関数が[複素関数]

複素平面

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

［絶対値］［偏角］



複素数には大小はない
絶対値の大小がある

複素数の指数関数

実数の指数関数のテイラー展開　$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

複素数の指数関数は, テイラー展開で定義する

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

すると

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots$$

$$= \underbrace{(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots)}_{\cos\theta \text{ のテイラー展開}} + i\underbrace{(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)}_{\sin\theta \text{ のテイラー展開}}$$

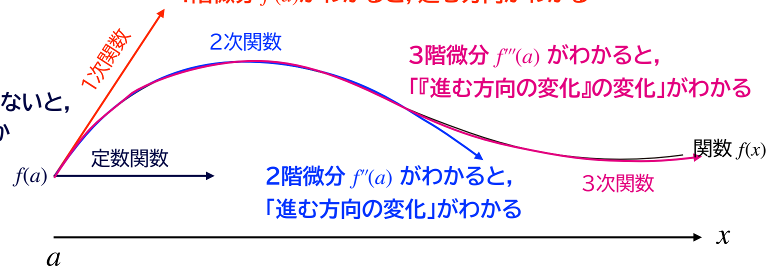
よって $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$　　$\theta = \pi$ のとき $e^{i\pi} + 1 = 0$ [オイラーの等式]

(ところで)テイラー展開について

テイラー展開　$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$

1階微分 $f'(a)$がわかると, 進む方向がわかる

微分が1つもわからないと,
最初の位置 $f(a)$ しか
わからない



3階微分 $f'''(a)$ がわかると,
「『進む方向の変化』の変化」がわかる

2階微分 $f''(a)$ がわかると,
「進む方向の変化」がわかる

$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a), \ldots$ がすべてわかるなら, 関数 $f(x)$ の「行く末」はすべてわかる

複素関数と微分
正則関数

複素関数の微分

複素関数の微分の定義は, 実関数と同様

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ただし, 変数は複素平面上にあるのが, 大きな違い

複素関数 $f(z)$ が, 複素平面の領域 D で[正則]

→ $f(z)$ が D 内のどこでも微分可能

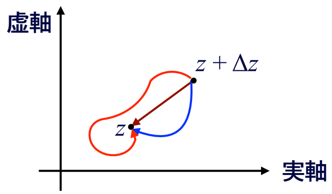
複素平面上で微分可能とは？

複素平面上での「微分可能」

複素関数 $f(z)$ が, 複素平面上のある点 z で微分可能とは

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

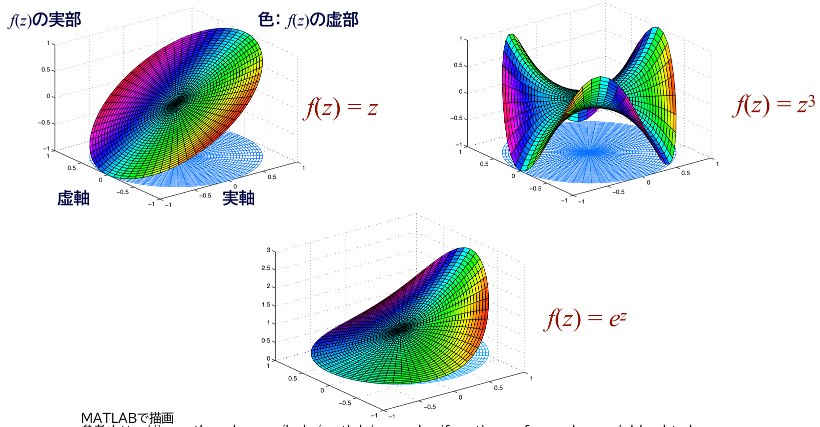
複素平面上で
$z+\Delta z$ が z にどのように近づいても, 極限値はひとつに定まる



どのように近づいても, 極限値は同じ

正則関数は,「折り目のないぐにゃぐにゃの板」

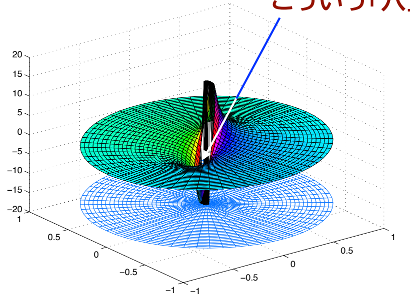
正則関数を図示すると



MATLABで描画
参考:http://jp.mathworks.com/help/matlab/examples/functions-of-complex-variables.html

正則でない例

こういう「穴」が問題になる



$f(z) = 1 \,/\, z$

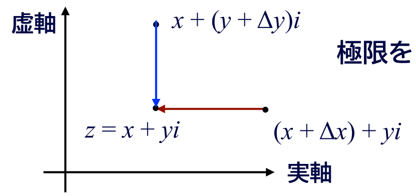
MATLABで描画
参考:http://jp.mathworks.com/help/matlab/examples/functions-of-complex-variables.html

コーシー・リーマンの関係式

複素関数 $f(z)$ が正則である必要十分条件は

$z = x + yi$ とするとき
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表せるなら

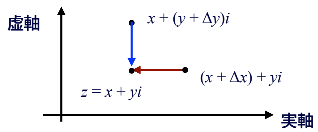
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad \text{かつ} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$



極限をとるときにどのように近づいてもよいので

$\downarrow$ $\leftarrow$ この2通りを考える

コーシー・リーマンの関係式



この2通りの近づき方で極限値は等しいので
$f'(z)$ を2通りの近づき方で表す

$\leftarrow$
$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{((x + \Delta x) + yi) - (x + yi)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

$\downarrow$
$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{(x + (y + \Delta y)i) - (x + yi)} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\ &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

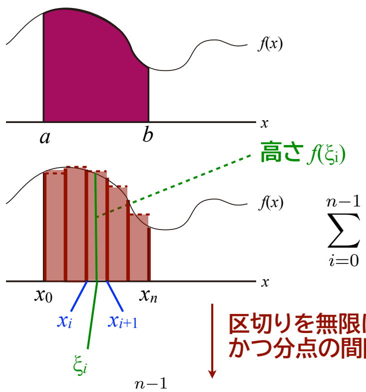
これらが実部・虚部とも等しい

複素関数の積分

実関数の積分

この面積を
求めたい

長方形で近似



$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

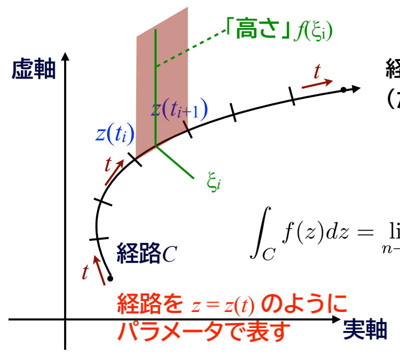
…

区切りを無限に細かく
かつ分点の間隔の最大値→0

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$ 実関数の積分

複素関数の積分

積分区間だけでなく複素平面のどこを通って積分するか[経路]が重要



経路の上に「板」が載っているイメージ
(ただし「高さ」は複素数)

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(z(t_{i+1})-z(t_i))$$

$f(z)$ の経路 C に沿った積分

経路を $z = z(t)$ のように
パラメータで表す

正則関数と積分

複素関数 $f(z)$ が, 領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら

$$F'(z) = f(z)$$

経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$$ 積分は経路に依存しない

正則関数と積分

複素関数 $f(z)$ が, 領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら $F'(z) = f(z)$

経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$$ 積分は経路に依存しない

経路C を $z = z(t)$ で表す　両端は $z(0) = a,\ z(1) = b$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$$ (置換積分)

$$= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dz}\frac{dz(t)}{dt}dt$$

(合成関数の微分)

$$\frac{dF(z(t))}{dt} = \frac{dF(z(t))}{dz}\frac{dz(t)}{dt}$$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dt}dt$$

$$= F(z(1)) - F(z(0)) = F(b) - F(a)$$

閉曲線に沿った積分

さっきの定理

複素関数 $f(z)$ が, 領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分なら　$F'(z) = f(z)$
経路 C が両端 a, b を含めてすべて D 内にあれば

$\int_C f(z)dz = F(b) - F(a)$　積分は経路に依存しない

ということは,
経路 C が単純閉曲線なら, 始点も終点も同じだから

$$\int_C f(z)dz = 0$$

コーシーの積分定理

閉曲線に沿った積分

複素関数 $f(z)$ が, 領域 D での正則関数 $F(z)$ の微分で　$F'(z) = f(z)$
経路 C が, D 内にある単純閉曲線ならば　$\int_C f(z)dz = 0$

実は　複素関数 $f(z)$ が, 領域 D での正則関数で
経路 C が, D 内にある単純閉曲線ならば

注:
「領域内で正則」であって,
「経路上で正則」ではない

$$\int_C f(z)dz = 0$$　[コーシーの積分定理]

示唆しているのは　正則関数の微分は正則関数
正則関数は何度でも微分できる
(証明の概略に, 次回で少し触れます)

$\oint_C f(z)dz$
閉曲線上の積分を表す

コーシーの積分定理

コーシーの積分定理　複素関数 $f(z)$ が, 領域 D での正則関数で
経路 C が, D 内にある閉曲線ならば　$\int_C f(z)dz = 0$

証明は, グリーンの定理で

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$　線積分と面積分を交換

2次元関数

閉曲線 C 上での(線)積分　閉曲線 C に囲まれた領域 D' 内での(面)積分

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ として

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \{u(x,y) + iv(x,y)\}(dx + idy)$$
$$= \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$
$$= \iint_{D'} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i\iint_{D'} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

正則関数なので, コーシー・リーマンの
関係式よりどちらもゼロ

問題🌀

問題(1)

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ という関係をつかって,
$\sin\theta,\ \cos\theta$ を指数関数で表してください。

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$ より

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ だから, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$ だから, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

問題(2)

sin の加法定理 $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ を
三角関数と指数関数の関係を使って導いてください。

$\sin x\cos y + \cos x\sin y$ を指数関数で表すと

$$\begin{aligned}\sin x\cos y + \cos x\sin y &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\\ &= \frac{1}{4i}\left[(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + (e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})\right]\end{aligned}$$

問題(2)

$$\begin{aligned}\sin x\cos y + \cos x\sin y &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\\ &= \frac{1}{4i}\left[(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + (e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})\right]\end{aligned}$$

右辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned}\sin x\cos y + \cos x\sin y &= \frac{1}{4i}\left[\left\{(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) + (e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)})\right\} + \right.\\ &\qquad \left.\left\{(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) - (e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)})\right\}\right]\\ &= \frac{1}{4i}\left[2(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)})\right]\\ &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i}\\ &= \sin(x+y)\end{aligned}$$

今日のまとめ

複素関数

- 複素数の指数関数
- 複素関数の微分→「正則関数」
- 複素関数の積分(経路に沿った積分)

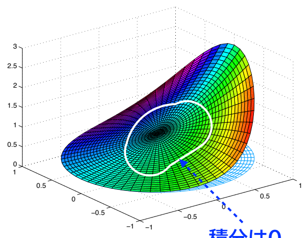
コーシーの積分定理

領域内で正則な関数を,
領域内の閉曲線に沿って積分すると0

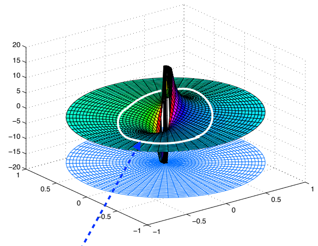
正則でない点を囲んで積分したら?

次回に向けて

正則でない点を囲んで積分したら？



$f(z) = e^z$



$f(z) = 1 / z$

正則でない「穴」によって決まる