2023 年度秋学期　応用数学（解析）　第１２回演習の解答例

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より，

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ = \cos\theta - i\sin\theta \tag{A1}$$

なので，

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \tag{A2}$$

より

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{A3}$$

が得られ，また

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \tag{A4}$$

より

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{A5}$$

が得られます。

2. 前問より，$\sin x\cos y + \cos x\sin y$ を指数関数で表すと

$$\begin{aligned}\sin x\cos y + \cos x\sin y &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i}\left[(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + (e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})\right]\end{aligned} \tag{A6}$$

です。この右辺を展開して，指数法則を適用して整理すると

$$\begin{aligned}\sin x\cos y + \cos x\sin y &= \frac{1}{4i}\left[\left\{\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}\right) + \left(e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}\right)\right\} + \right. \\ &\qquad \left.\left\{\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}\right) - \left(e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}\right)\right\}\right] \\ &= \frac{1}{4i}\left[2\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}\right)\right] \\ &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \\ &= \sin(x+y)\end{aligned} \tag{A7}$$

となります。