

前回の講義で、

領域 D で正則な関数 $f(z)$ について、経路 C が D の内部の閉曲線ならば、 $\oint_C f(z)dz = 0$ である。

という「コーシーの積分定理」を説明しました。では、正則でない点、いわば「穴」がある場合はどうなるのでしょうか？ 今回は、閉曲線 C の内側に、関数 $f(z) = \frac{1}{z-1}$ における $z=1$ のように、正則でない点がある場合はどうなるか、を考えます。

$f(z) = z^n$ の積分

今日の問題のような積分を考えるために、関数を級数で表して、各項に対する積分を考えます。その準備として、 $f(z) = z^n$ を、単位円周（複素平面における、原点を中心とする半径 1 の円周）にそって正の向きにまわって積分した時の値を考えます。

C を単位円周とします。まず、 $n = 0, 1, 2, \dots$ の場合は、円周内で z^n は正則ですから、コーシーの積分定理により $\oint_C f(z)dz = 0$ です。

一方、 $n = -1, -2, \dots$ のとき、あらためて $f(z) = \frac{1}{z^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおきます。このとき、 $z=0$ で $f(z)$ は正則ではありません。この場合は、単位円周 C を正の向きにまわる z が $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と表されるので、

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta \end{aligned} \quad (1)$$

となります。この積分は、 $n = 1$ のとき

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \quad (2)$$

となり、 $n = 2, 3, \dots$ のときは

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z^n} dz &= \frac{i}{i(1-n)} \left[e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{1-n} \left[e^{2(1-n)\pi i} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

で、 $e^{2(1-n)\pi i} = \cos(2(1-n)\pi) + i \sin(2(1-n)\pi) = 1$ ですから上の積分は 0 です。

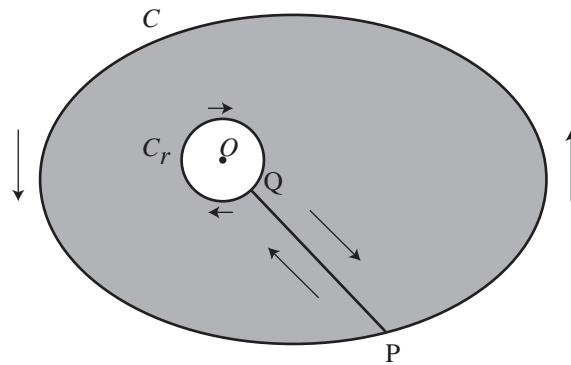


図 1: コーシーの積分公式

同様に, a を中心とする半径 1 の円周を C とするとき,

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

となります。

コーシーの積分公式

コーシーの積分公式は, 領域 D で正則な関数 f の点 z における値 $f(z)$ が, D 内で点 z を囲み正の方向に 1 周する閉曲線 C に沿った積分を使って

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (5)$$

と表されるというものです。とくに $z = 0$ のとき, C を原点を囲み正の方向に一周する閉曲線として

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (6)$$

となります。この公式は, 正則関数 f の点 z での値は, z を囲む閉曲線上の値だけで決まってしまうことを示しています。正則関数を「軟らかい板を, ぐにゃぐにゃとどこにも折れ目がなく曲げたようなもの」と考えれば, ある点での関数の値が周囲での値によって決まってしまう, というのは, それほど不思議ではありません。

(6) 式の意味を考えるため, 図 1 のような, 原点を囲む閉曲線 C とその内側で原点を囲む半径 r の円 C_r , それに両者を結ぶ線分 PQ を考えます。関数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$ は原点で正則ではありませんが, P から C を正の向きに 1 周 $\rightarrow PQ \rightarrow C_r$ を逆向きに 1 周 $\rightarrow QP$ という経路を考えると, この経路は閉曲線で, その内部で関数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$ は正則です。よって, コーシーの積分定理により

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_P^Q \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_Q^P \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0 \quad (7)$$

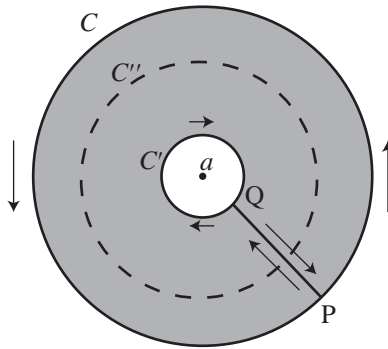


図 2: 孤立特異点とローラン級数展開

で、 $P \rightarrow Q$ の積分と $Q \rightarrow P$ の積分は打ち消し合い、 $-C_r$ (C_r の負の方向) に沿った積分は $(-1) \times C_r$ の正の方向に沿った積分となるので、

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (8)$$

となります。 $r \rightarrow 0$ のとき、上式の右辺は $\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta$ に収束し¹、前節で説明した $\frac{1}{z}$ の積分を使うと

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta = f(0) \oint_{C_r} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i f(0) \quad (9)$$

となりますから、(6) 式が得られました。これをさらに z だけ (積分経路も含めて) 平行移動すると、(5) 式が得られます²。

孤立特異点とローラン級数展開

領域 D において、関数 $f(z)$ が 1 点 a を除いて正則であるとき、 a を $f(z)$ の**孤立特異点**といいます。つまり、今日の最初に述べた「穴」です。

このとき、 a を中心とする円周 C と、その内部でやはり a を中心とする円周 C' を考え、図 2 のように、 P から C を正の向きに 1 周 $\rightarrow PQ \rightarrow C'$ を逆向きに 1 周 $\rightarrow QP$ という閉じた経路を考えます。すると、経路の内部で $f(z)$ は正則ですから、 $f(z)$ をコーシーの積分公式を用いて表すことができます。図 1 と同様の関係を考慮すると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (10)$$

となります。

ここで、(10) 式の第 1 項の積分の過程では、 ζ が外側の経路 C を動き、 z は C の内部にあるので

¹なぜ収束するのは、参考文献を参照してください。

²詳細は、参考文献を参照してください。

$|z - a| < |\zeta - a|$ です。そこで、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} \quad (11)$$

と変形すると、右辺の2つめの分数は初項1、公比 $\frac{z - a}{\zeta - a}$ の等比級数の和で表され、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{z - a}{\zeta - a} + \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^2 + \dots \right\} \quad (12)$$

となります。同様に、(10)式の第2項の積分の過程では、 ζ が内側の経路 C' を動き、 z は C' の外部にあるので $|\zeta - a| < |z - a|$ で、

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{\zeta - a} \left\{ 1 + \frac{\zeta - a}{z - a} + \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^2 + \dots \right\} \quad (13)$$

と表されます。

(12)式、(13)式を(10)式に代入すると、

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - a} + a_0 + a_1(z - a) + \dots + a_{n-1}(z - a)^{n-1} + a_n(z - a)^n + \dots \quad (14)$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (15)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

となります³。

ここで、図2の円環領域で $f(z)$ は正則なので、コーシーの積分定理により

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta = 0 \quad (17)$$

であり、これを使うと、(15)式と(16)式を合わせて

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)(\zeta - a)^{-n-1} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (18)$$

と、円周 C だけを使って表すことができます。

関数 $f(z)$ をこのような級数で表すことを、 $f(z)$ の孤立特異点 a のまわりの**ローラン (Laurent) 級数展開**といいます。

³付録も参照してください。ここで「級数の積分」を「積分の級数」に置き換えられるのは当然ではなく、本当は、ここがこの証明で難しいところです。ここでは詳細は略します。

n 位の極

関数 $f(z)$ と孤立特異点 a について、ローラン級数の負のべきの項が有限、すなわち級数が a_{-n} ($n \geq 1$) から始まる時、 a を **n 位の極** といいます。なお、負のべきの項が無限に現れるときは、 a は**真性特異点** とよばれます。

a が n 位の極であるとき、

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots \quad (19)$$

ですから、両辺を $(z-a)^n$ 倍すると

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots \quad (20)$$

となるので、

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f(z) = a_{-n} \quad (21)$$

となります。

留数

図2において、 $f(z)$ を円環部分の中にある円周 C'' に沿って正の向きに1周して積分することを考えます。 $f(z)$ をローラン級数展開したものの各項を積分すると考えると、今回の最初に説明した「 z^n の積分」により、 $\frac{1}{z-a}$ の項以外はすべて0となり、

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C''} f(z) dz \quad (22)$$

となります⁴。この a_{-1} を、 $f(z)$ の孤立特異点 a における**留数 (residue)** といい、 $\text{Res}(a; f)$ で表します。

ここで、孤立特異点 a が n 位の極であるとき

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots \quad (23)$$

と表されますから、

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots \quad (24)$$

という、べき級数が得られます。したがって、両辺を $(n-1)$ 回微分すると、

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + \frac{n!}{1!} a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!} a_1(z-a)^2 + \cdots \quad (25)$$

となり、

$$\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) \quad (26)$$

が得られます。これらのことは、

⁴こう言えるのは、ローラン級数が「一様収束」しているからです。詳細は略します。

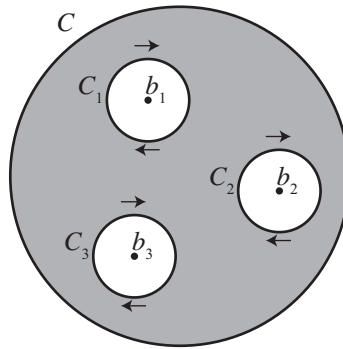


図 3: 有限個の孤立特異点を含む場合

- 孤立特異点つまり「穴」を囲んだ閉曲線上の積分は、留数で表される。
- 留数は、上の (26) 式が計算できれば求められる

ことを表しています。

とくに、 $n = 1$ ，すなわち a が 1 位の極の場合は、

$$\text{Res}(a; f) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) \quad (27)$$

となります。これは、(21) 式で $n = 1$ とした場合に相当しています。

孤立特異点が複数ある場合

また、閉曲線 C の内部で、関数 $f(z)$ が有限個の孤立特異点 b_1, b_2, \dots を除いて正則であるとします。このとき、 b_1, b_2, \dots のそれぞれを囲み C の内部にある円周を正の向きに一周する経路を C_1, C_2, \dots とすると、これまでと同様の考えで、コーシーの積分定理により

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz - \dots = 0 \quad (28)$$

ですから、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz = \text{Res}(b_1; f) + \text{Res}(b_2; f) + \dots \quad (29)$$

がなりたちます。このことは、

いくつかの「穴」を囲んだ閉曲線上の積分も、それぞれの「穴」での留数がわかれば求められる

ことを示しています。

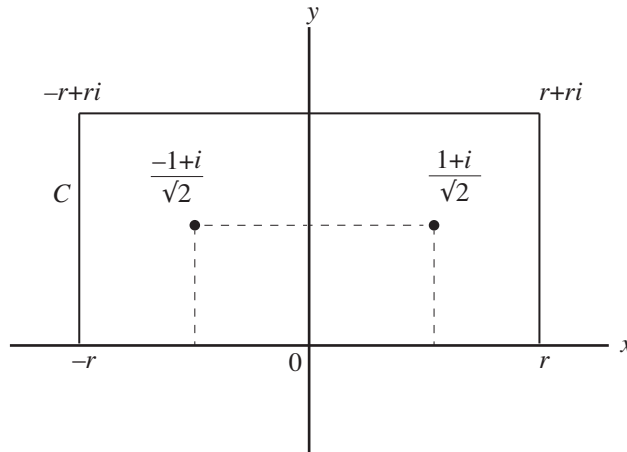


図 4: 留数と定積分

問題例

留数の考えを使って、図 4 に示す、幅 $2r$ ・高さ r の長方形の経路 C に沿った $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ の積分を考えます。

$$\frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}})} \quad (30)$$

ですから、4 つある $f(z)$ の孤立特異点 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ は、すべて 1 位の極です。

図 4 の経路 C の内部に入っている極は、 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ だけです。ここで、(27) 式より

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} (z - \frac{1+i}{\sqrt{2}})f(z) \\ &= \frac{1}{(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1-i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}})} \\ &= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (31)$$

となり、同様に $\text{Res}(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$ となります。

よって、(29) 式より、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f\right) + \text{Res}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f\right) = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \quad (32)$$

で、すなわち $\oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ が得られます。

さて、この考えを使って、実関数の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$ を求めることを考えます。これが、複素関数論の説明の初めに言っていた、「本当にやりたかったこと」でした。

そのために、経路 C を各辺に分けて、それぞれの辺での $\frac{1}{z^4+1}$ の積分が、実軸上以外では $r \rightarrow \infty$ のとき 0 になることを示します。これには、実軸以外の辺上では $|z| \geq r$ であることを用います。

例えば、長方形の右側の立辺では

$$\begin{aligned} \left| \int_r^{r+ri} \frac{1}{z^4+1} dz \right| &\leq \int_r^{r+ri} \frac{1}{|z|^4+1} d|z| \\ &\leq \int_0^r \frac{1}{r^4+1} dy = \frac{r}{r^4+1} \end{aligned} \quad (33)$$

で、 $r \rightarrow \infty$ のとき 0 になります。他の辺でも同様で、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ が得られます。

問題

次の積分 (C は原点を中心とする半径 2 の円周) を求めてください。

$$\frac{-1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin z}{\cos z} dz \quad (A1)$$

(この問題は、歌手の矢野顕子氏のアルバム「ふたりぼっちで行こう」の CD ジャケットに出ているもので、答えは「ふたり」の 2 です。)

注 z を複素数とすると、三角関数 $\sin z, \cos z$ はそれぞれ

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (A2)$$

と定義されます。前回の演習問題で、 θ を実数とすると

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (A3)$$

という関係があることを示しました。(A2) 式による複素三角関数の定義は、(A3) 式の実数 θ を複素数 z に置き換えたものです。

付録：正則関数が無限回微分可能であることの「直観的な」説明と、正則関数のテイラー展開

関数 $f(z)$ が領域 D 内で正則であるとき、 $f(z)$ が無限回微分可能であることを、「直観的」に説明します。

コーシーの積分公式より、領域 D 内の閉曲線 C について

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (A1)$$

となります。このとき、 C 内の点 a について

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \quad (A2)$$

で、あらためて ζ を z と書き直すと

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{A3})$$

です。そこで、 $f'(a)$ を考えると

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{da} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{A4})$$

となりますが、ここで積分と微分の順番を逆にしていいなら、

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{da} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (\text{A5})$$

で、

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \frac{f(z)}{z-a} &= f(z) \frac{d}{da} (z-a)^{-1} \\ &= f(z) (-(z-a)^{-2}) \cdot (-1) \\ &= \frac{f(z)}{(z-a)^2} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

ですから

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \quad (\text{A7})$$

となります。もう1回微分すると

$$f''(a) = \frac{2 \cdot 1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz \quad (\text{A8})$$

で、これを繰り返すと

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (\text{A9})$$

となり、無限回微分可能であることがわかります。

ただ、この途中で行った「積分と微分を交換する」ことは当然にできることではなく、ここにある積分が「絶対可積分」であることから導かれます。そのため、ここの説明は「直観的」としています。また、(A9)式はグルサの定理とよばれています。

なお、本文(14)式のローラン級数で、次数が正である部分は、その係数が本文(15)式で、(A9)式とは各項が $n!$ 倍の違いになっています。この部分は、関数 $f(z)$ が正則である領域 D 内の閉曲線 C に関するもので、これが $f(z)$ が正則であるときの a のまわりのテイラー展開、すなわち

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (\text{A10})$$

に相当します。

参考文献

志賀浩二, 複素数30講, 朝倉書店, 1989. ISBN978-4-254-11481-2

神保道夫, 複素関数入門, 岩波書店, 2003. ISBN978-4-000-06874-1

中島匠一, 複素関数入門—留数計算への道すじ, 共立出版, 2022, ISBN978-4-320-11476-0