2023年度秋学期　応用数学（解析）　第１４回

第４部・「その先の解析学」への導入／　測度論ダイジェスト (1) ルベーグ測度と完全加法性

測度論とは,「ものを測る」ことの本質を考える数学の分野です。長さ，面積，体積，質量など，ものを測るにはいろいろな測り方がありますが，これらをあわせて，何かを測った結果を**測度 (measure)** といいます。測度論では，測るとは何か、測ることのできる集合とは何か，といったことを学びます。今回の「測度論についてのダイジェスト」第 1 回では，測度論誕生のきっかけになった「疑問」を説明し，集合の基本的な測り方である**ルベーグ測度**，測度の持つべき基本的な性質である**完全加法性**，そしてその帰結として現れてきた**零集合**について説明します。

積分に対する疑問

定積分を習った時に,「任意の a について, 関数 $f(x)$ の a から a までの積分は 0, すなわち $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ である」すなわち「幅が 0 の積分は 0」ということを習ったと思います。

ということは，図 1(a) のように，積分 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx$ から，p と q の間にある a のところだけ幅 0 の線を抜き取っても，積分の値，すなわち図のグレーの部分の面積は減らないということになります。

幅 0 の積分は 0 なのだから，a の 1 カ所だけでなく，図 1(b) のように幅 0 の線を何本抜き取っても，やはり積分の値，すなわち図のグレーの部分の面積は減らないはずです。ならば，p と q の間にあるすべての有理数の位置にある幅 0 の線を抜き取っても，すなわち可算無限個の線を抜き取っても，やはり面積は減らないのでしょうか？

どうも納得いかない気がします。この疑問は，今までなんとなく考えてきた「幅」という概念を，より精密にとらえる必要があることを示しています。

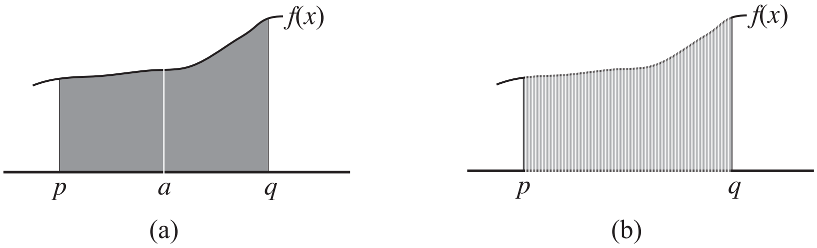

図 1: 積分に対する疑問.

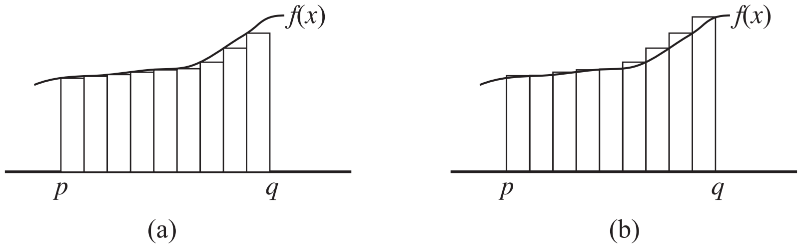

図 2: 積分と長方形の配置.

ジョルダン測度

これまで, 定積分は「区分求積法」として習ったと思います。これは, ある関数の積分区間を「重なりのない, 有限個の」区間に分けて，その上に，その関数のグラフの下の部分におさまるように配置した長方形（図 2(a)）と，グラフの下の部分を含むように配置した長方形（図 2(b)）を考えます。

区間の分け方をさまざまに変えたとき，前者の配置での長方形の面積の上限を**ジョルダン内測度**，後者の配置での長方形の面積の下限を**ジョルダン外測度**といい，両者が一致するときそれを**ジョルダン測度**といいます[1]。

この例のような 2 次元の場合，このジョルダン測度をこれまで「面積」とよんできました。このように面積が測れる図形（一般には測度が定められる集合）を**ジョルダン可測**であるといいます。

ジョルダン測度には，次の性質があります。ここで，ジョルダン可測な集合 A のジョルダン測度を $J(A)$ とします。

1. $J(\emptyset) = 0$
2. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$

後者の性質を**有限加法性**といいます。

ルベーグ測度

ジョルダン測度では「有限個の長方形」を考えています。一方，定積分の定義では，長方形の面積の「極限」を考えています。しかし，第 4 回の講義で説明した「極限」の意味を考えると，面積の極限を考えることは，無限個の長方形を考えることとは違うことがわかります。面積の極限とは，長方形を好きなだけ細かく分ければ，その極限に好きなだけ近づけることができる，という意味であって，あくまで有限個の長方形について想定されているものです。

測る図形の形がなめらかだったり，少々凸凹している程度なら，長方形が有限個であっても「十分多ければ」上記のように測ることができるでしょう。しかし，もっと複雑な図形ならば，いくら長方形を細かく分けてもある極限に思うように近づけることができない，すなわち可算無限個の長方形を用いなければ測ることができない場合があることが想像されます。

[1] ここでは定積分の区分求積法で説明していますが，一般にはある図形の内部に重なりのない有限個の長方形を敷き詰める，あるいは重なりのない有限個の長方形で覆う，と考えます。

そこで，可算無限個の長方形を使った測度を考えます。図形 (平面の有界な集合) S を，重なりを許した[2]可算無限個の長方形 $I_1, I_2, \ldots$ で覆ったとき，それらの長方形の面積 $|I_1|, |I_2|, \ldots$ の和の下限 $\inf \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ を S の**ルベーグ外測度**といい，$m^*(S)$ で表します。

ルベーグ外測度には，次の性質がなりたちます。

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. $S \subset T = m^*(S) \leqq m^*(T)$
3. $S_1, S_2, \ldots$ を有界な集合の列とするとき，$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ が有界ならば，$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$

性質 3 は，**完全劣加法性**とよばれるものです。この性質は，次のように証明されます。

有界な集合の列 $S_1, S_2, \ldots$ のうちのひとつの集合 S_i を，長方形 $I_{1(i)}, I_{2(i)}, \ldots$ で覆うことを考えます。このとき，S_i のルベーグ外測度 $m^*(S_i)$ は S_i を覆う長方形の面積の和の下限なので，任意の正の数 ε について，

$$S_i \subset I_{1(i)} \cup I_{2(i)} \cup \cdots \cup I_{n(i)} \cup \ldots$$

かつ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| < m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \tag{1}$$

となる $I_{1(i)}, I_{2(i)}, \ldots$ が存在します[3]。

他の S についても同様に考えると，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)} \tag{2}$$

となります。この式の右辺は，「可算無限個の長方形の可算無限個の和集合」になっていますが，これは「可算無限個の長方形の和集合」と同じです[4]。そこで，

$$\begin{aligned} m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) &\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \left(m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \quad \text{((1) 式より)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i) + \varepsilon \end{aligned} \tag{3}$$

となり，ε は正の数であればいくらでも小さくできるので，性質 3 がなりたちます。■

[2] 後で下限をとっているので，重なりはあってもなくても同じです。
[3] 面積の和が下限となる覆い方よりも，少し大きな覆い方が存在する，という意味です。
[4] 整数が可算無限個存在するのに対して，どちらも整数である分母・分子の組からなる有理数もやはり可算無限個存在する，ということと同じです。

さて，ルベーグ外測度を使って，「可測な集合」を定義します。集合 S が，任意の集合 E に対して

$$m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c) \tag{4}$$

であるとき（S^c は S の補集合），S を**ルベーグ可測**である（**可測集合**である）といい，$m(S) \equiv m^*(S)$ を S の**ルベーグ測度**，あるいは単に**測度**といいます[5]。

完全加法性

$E_1, E_2, \ldots$ を互いに共通部分をもたない可測集合列とします。このとき，外測度 m^* について

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) \tag{5}$$

という**完全加法性**がなりたちます。完全加法性は，「ある集合の測度は，それを部分に分けた時の，各部分の測度の合計」という直感が，「可算無限個に分けた場合」でもなりたつことを示しています。

これを証明するには，$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ として，任意の集合 A と任意の n について

$$m^*(A) \geqq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap S^c) \tag{6}$$

がなりたつことを示します。これがなりたつと，$n \to \infty$ とするとき $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap E_i) = A \cap S$ ですから，m^* の完全劣加法性（性質３）を用いて

$$m^*(A) \geqq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap S^c) \geqq m^*(A \cap S) + m^*(A \cap S^c) \tag{7}$$

がなりたちます。一方，$A = A \cap S + A \cap S^c$ なので，完全劣加法性より

$$m^*(A) \leqq m^*(A \cap S) + m^*(A \cap S^c) \tag{8}$$

もなりたち，両者から

$$m^*(A) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap S^c) \tag{9}$$

となります。A は任意の集合なので，ここで $A = S$ とすると，$S \cap E_i = E_i$，$S \cap S^c = \emptyset$ なので

$$\begin{aligned} m^*(S) &= \sum_{i=1}^{n} m^*(E_i) + m^*(\emptyset) \\ m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) &= \sum_{i=1}^{n} m^*(E_i) \end{aligned} \tag{10}$$

となり，完全加法性（(5) 式）が成り立つことが示されます。

[5] (4) 式による可測集合の定義は，「カラテオドリの意味の可測性」ともよばれます。

さて，(6) 式がなりたつことは数学的帰納法によって示します。$n = 1$ のとき，$E_1 \subset S$ より $E_1^c \supset S^c$ なので

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\ &\geqq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap S^c) \end{aligned} \tag{11}$$

で，たしかに (6) 式がなりたっています。$n = k$ のとき (6) 式がなりたっているとします。ここで A は任意なので，これを $A \cap E_{k+1}^c$ で置き換えると

$$m^*(A \cap E_{k+1}^c) \geqq \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap E_{k+1}^c \cap E_i) + m^*(A \cap E_{k+1}^c \cap S^c) \tag{12}$$

で，$E_{k+1}^c \cap E_i = E_i$，$E_{k+1}^c \cap S^c = S^c$ より

$$m^*(A \cap E_{k+1}^c) \geqq \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap S^c) \tag{13}$$

がなりたちます。一方，E_{k+1} は可測なので

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_{k+1}) + m^*(A \cap E_{k+1}^c) \tag{14}$$

で，(13) 式を (14) 式の右辺の第２項に用いると

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geqq m^*(A \cap E_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap S^c) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap S^c) \end{aligned} \tag{15}$$

となり，やはり (6) 式がなりたっています。よって証明されました。■

零集合と「ほとんどいたるところ」

ここまでの議論をふまえて，最初の「有理数全体の幅」の問題を考えます。ここまでは平面上の図形を長方形で覆うイメージを思い浮かべてきましたが，ここでは，数直線上のある集合を「区間」を組み合わせて覆うことを考えます。有理数は可算無限個あるので，ジョルダン測度の考え方で「幅」を考えることはできません。そこで，ルベーグ測度で考えます。

有理数は可算ですから，通し番号をつけて $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ と表すことができます。ルベーグ測度の考えでは，有理数の集合が数直線上でもつ幅は，有理数全体を区間の組み合わせ（重なってもよいことに注意）で覆ったときの，区間の長さの合計の下限です。そこで，ε を任意の正の数とし，a_1 を幅 $\varepsilon/2$ の区間で，a_2 を幅 $\varepsilon/2^2$ の区間で，・・・，a_n を幅 $\varepsilon/2^n$ の区間で覆うとします。

このとき区間の長さの合計は

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = \varepsilon \tag{16}$$

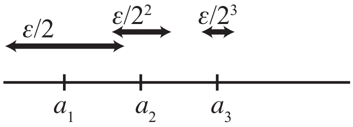

図 3: 有理数を覆う

となります。ε は任意の正の数ですからいくらでも小さくすることができるので，区間の長さの合計の下限は 0 となります。すなわち，**有理数全体の集合のルベーグ測度は 0** となります。したがって，最初の問題で，積分区間内の有理数に対応する線を，積分からすべて抜き取っても，積分の値（面積）は変わらない，ということになります。

ルベーグ測度に対する有理数の集合のように，測度が 0 である集合のことを**零集合**といいます。また，「測度 0 の集合を除いた部分で」ということを，**ほとんどいたるところ**[6]で，といいます。

次回は，ルベーグ測度を基盤として構成された積分（ルベーグ積分）によって，これまで学んだ積分（リーマン積分）では表現できない積分を表すことを考えます。

問題

集合 S について $m^*(S) = 0$ ならば，S のすべての部分集合は可測集合であり，その測度は 0 であることを示してください。（このことから，本文で述べた「有理数全体の集合の測度は 0」より，「有限個の数からなる集合の測度も 0」であることがわかります。）

参考文献

松澤忠人，原優，小川吉彦，積分論と超関数論入門，学術図書，1996. ISBN4-87361-201-2
志賀浩二，ルベーグ積分３０講，朝倉書店，1990. ISBN4-254-11484-2
寺澤順，はじめてのルベーグ積分，日本評論社，2009. ISBN978-4-535-78544-1

[6] almost everywhere の訳語です。この頭文字をとって，「ほとんどいたるところで $x = 0$」を $x = 0$ $a.e.$ と書きます。