

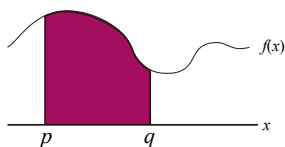
2023年度秋学期 応用数学(解析) 第14回  
 第4部・「その先の解析学」への導入  
 測度論ダイジェスト(1) ルベーグ測度と完全加法性

浅野 晃  
 関西大学総合情報学部

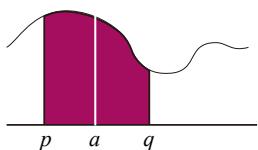


## 積分に対する疑問🤔

## 積分に対する疑問



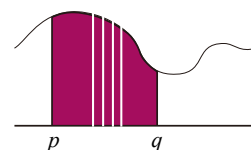
積分  $\int_p^q f(x) dx$



$\int_a^a f(x) dx = 0$  だから,

aのところ幅0の直線を抜いても  
 積分の値は変わらない

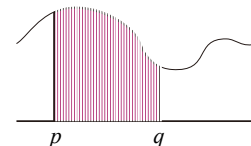
## 積分に対する疑問



$\int_a^a f(x) dx = 0$

幅0の直線を何本抜いても  
 積分の値は変わらない

どれだけ拡大してみても、  
 びっしりと直線がならんでいる



可算無限個の直線を抜いても  
 積分の値は変わらないのか？

## 「数えられる」無限(再び)

1, 2, 3, ... ←そして、「無限」

自然数とは、数えるための数字

自然数の集合と同じ無限を  
「数えられる無限」すなわち[可算無限]という

その「個数」は[可算基数]  $\aleph_0$  (アレフゼロ)

(よく「可算無限個」という)

## どうやって数えるのか(再び)

自然数と対応がつく集合は数えられる

自然数 1, 2, 3, ... 過不足なく1対1対応がつく  
集合A = {a, b, c, ...} ([全単射]が存在する)なら

この集合の[基数]([濃度])は  $\aleph_0$

[可算無限集合]という

## 偶数の集合の濃度は(再び)

偶数と自然数とは対応がつくか

自然数 1, 2, 3, ..., n, ...  
偶数 2, 4, 6, ..., 2n, ...

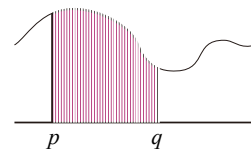
1対1対応がつく(全単射が存在する)

偶数の基数も  $\aleph_0$

自然数と「個数」は同じ

## 積分に対する疑問

どれだけ拡大してみても、  
びっしりと直線がならんでいる



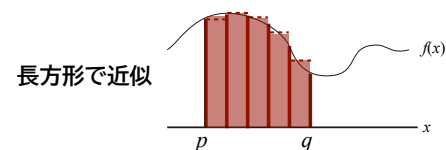
可算無限個の直線を抜いても  
積分の値は変わらないのか？

この疑問に答えるには、  
「幅」「面積」というものをもっと精密に考える必要がある

「測度論」

## ジョルダン測度

## 区分求積法で積分を求める



積分  $\int_p^q f(x)dx$  は,

積分区間を 重なりのない, 有限個の 区間に分けて,  
その上の長方形の面積の極限

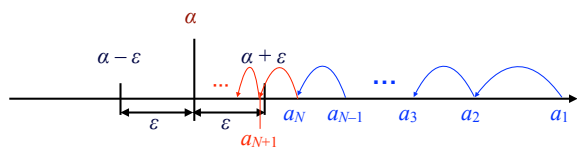
「極限」とは, 無限ではなく有限

## 数列の収束の定義(再び)

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するとは

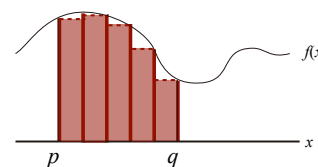
数列が十分大きな番号  $N$  まで進めば

$N$  番より大きな番号  $n$  については,  
 $a_n$  は, みなその狭い区間  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$  に入る



$\varepsilon$  をどんなに小さくしても そういう  $N$  がある

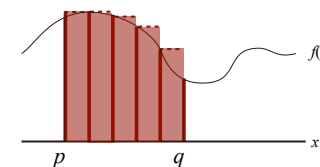
## ジョルダン内測度と外測度



グラフの下側の部分の  
内部におさまる長方形

区間の分け方をいろいろ変えた時

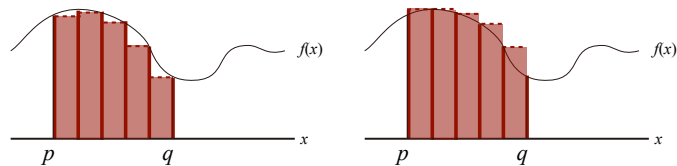
こちらの上限  
[ジョルダン内測度]



グラフの下側の部分を  
内部に含む長方形

こちらの下限  
[ジョルダン外測度]

## ジョルダン測度



こちらの上限

ジョルダン内測度

こちらの下限

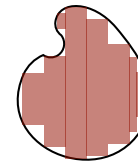
ジョルダン外測度

両者が一致するとき[ジョルダン測度]という  
2次元の場合これを[面積]という

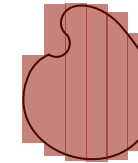
ジョルダン測度が定まる図形(集合)を[ジョルダン可測]という

## ジョルダン測度

積分の例(区分求積法)に限らず



この上限が  
ジョルダン内測度



この下限が  
ジョルダン外測度

両者が一致するときジョルダン測度  
2次元の場合これを面積という

ジョルダン測度が定まる図形(集合)をジョルダン可測という

## ジョルダン測度の性質

ジョルダン可測な集合Aの, ジョルダン測度を  $J(A)$  とする

$$J(\emptyset) = 0 \quad \text{空集合の測度は0}$$

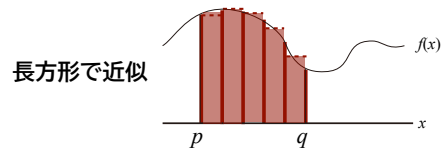
$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$$

重なりのない2つの集合については**和集合の測度は測度の和**

[有限加法性]という

## ルベーグ測度

## 「有限個の長方形」



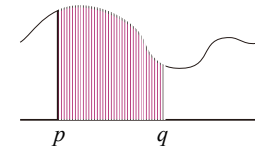
積分  $\int_p^q f(x)dx$  は,

積分区間を **重ならない、有限個の** 区間に分けて、  
その上の長方形の面積の**極限** **ジョルダン測度**

**極限は、「無限」とは違う** 有限だが、必要なだけいくらでも大きくできる

## 有限個の長方形では、困る

どれだけ拡大してみても、  
びっしりと直線がならんでいる

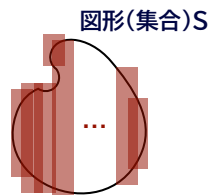


**幅0の直線を可算無限個抜いても、  
積分の値は変わらないのか？**

**可算無限個の隙間があるところに  
有限個の長方形は配置できない**

こういう場合でも積分や面積を考えられるようにするには  
**可算無限個の長方形にもとづく測度が必要**

## ルベーグ外測度



Sを  
重なりを許した**可算無限個の長方形**で覆う

それらの長方形の面積の和の下限を  
**ルベーグ外測度**という  $m^*(S)$

$m^*(\emptyset) = 0$  空集合の外測度は0

$S \subset T \Rightarrow m^*(S) \leq m^*(T)$  包含関係と外測度の大小関係は一致

## 完全劣加法性



ジョルダン測度の「有限加法性」

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$$

**可算無限個の長方形を使う場合も  
同じような性質がなりたないか？**

ルベーグ外測度については**完全劣加法性**

有界な集合の列  $S_1, S_2, \dots$  について

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \text{ が有界ならば } m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$$

可算無限個の  
和集合

可算無限個の和集合の  
外測度

可算無限個の  
外測度の和

## 完全劣加法性の証明

有界な集合の列

$S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$



$S_i$ を長方形で覆う

$I_1(i), I_2(i), I_3(i), \dots$

この覆い方は  $S_i \subset I_{1(i)} \cup I_{2(i)} \cup \dots \cup I_{n(i)} \cup \dots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| < m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

面積の和が その下限 よりも少し大きい

こういう覆い方  $I_1(i), I_2(i), I_3(i), \dots$  が存在する

他の  $S_i$  についても同様だから

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$$

各  $S_i$  について

$I_1(i), I_2(i), I_3(i), \dots$  で覆う

## 完全劣加法性の証明

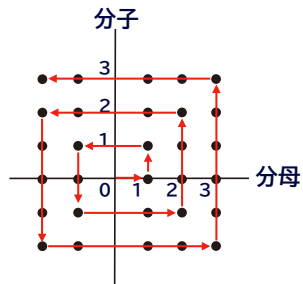
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$$

可算無限個の長方形の, 可算無限個の和集合

可算無限個の長方形の和集合 と同じ

## 有理数は可算か

有理数の集合は, 可算基数をもつか



分母を横軸,  
分子を縦軸とすると,  
有理数は図の黒点(格子点)  
※分母0の点は除く ※重複あり

すべての格子点を一筆でたどれば  
自然数と一対一対応がつく → 可算基数をもつ

## 完全劣加法性の証明

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n(i)}$$

可算無限個の長方形の, 可算無限個の和集合

可算無限個の長方形の和集合 と同じ

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| && \sum_{n=1}^{\infty} |I_{n(i)}| < m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \left(m^*(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) && \varepsilon \text{ は正の数であればいくらでも小さくできる} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$$

## ルベーグ測度と完全加法性

25 | 36

## 可測集合

集合  $S$  が、任意の集合  $E$  について

$$m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c) \quad \text{であるとき,}$$

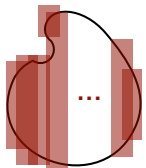
$E$  の外測度       $E$  のうち  
 $S$  である部分の  
外測度                       $E$  のうち  
 $S$  でない部分の  
外測度

$S$  は [ルベーグ可測] である ([可測集合] である) という

$m(S) \equiv m^*(S)$  を [ルベーグ測度] (あるいは単に [測度]) という

2023年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 26 | 36

## 完全加法性



ジョルダン測度の「有限加法性」

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow J(A \cup B) = J(A) + J(B)$$

可算無限個の長方形を使う場合も  
同じような性質がなりたたないか？

$E_1, E_2, \dots$  を互いに共通部分を持たない可測集合列

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) \quad \text{完全加法性}$$

可算無限個の和集合      測度の可算無限個の和

(証明はテキストで)

和集合の測度は測度の和

可算無限個に分けた場合でもそうなる

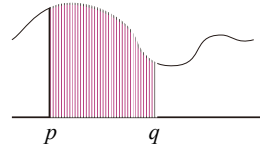
2023年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 27 | 36

零集合と  
「ほとんどいたるところ」

28 | 36

## 積分に対する疑問

どれだけ拡大してみても、  
びっしりと直線がならんでいる



可算無限個の直線を抜いても  
積分の値は変わらないのか？

この疑問に答えるために、  
pとqの間にある有理数全体が占める幅を考える

可算無限個ある

## 有理数全体が占める幅

可算無限個ある有理数の幅を考えるには  
ルベーグ測度の考え方が必要

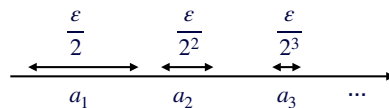
有理数全体の集合が数直線上で持つ幅(測度)

有理数全体を、区間の組み合わせで覆ったときの  
「区間の長さの合計」の下限

## 有理数全体が占める幅

$\varepsilon$  を任意の正の数とすると

有理数  $a_1, a_2, \dots$  を こういうふうに覆うことができる



区間の長さの合計

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \dots = \varepsilon$$

その下限は0 有理数全体のルベーグ測度は0

## 零集合と「ほとんどいたるところ」

有理数全体のルベーグ測度は0

測度が0の集合を零集合という

「測度が0の集合を除いた部分で」を  
(この場合、「有理数を除いた部分で」)

「ほとんどいたるところで」(a.e.)という



## 今日のまとめ

### ルベーグ外測度

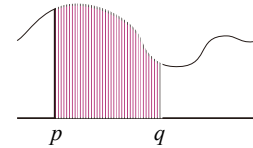
可算無限個の長方形で図形を覆ったときの、  
長方形の面積の合計の下限  
可測集合のルベーグ外測度がルベーグ測度

### 零集合と「ほとんどいたるところ」

有理数の集合のルベーグ測度は0  
測度0の集合を「零集合」という  
零集合を除いた部分を「ほとんどいたるところ」という

## 次回は

最初の疑問はまだ解決していない



「有理数の位置にある可算無限個の直線を  
抜いた」積分は、どうやって求めるのか？

ジョルダン測度にもとづく積分では、可算無限個の分割はできない

ルベーグ測度にもとづくルベーグ積分を考える

## 問題について

## 問題

集合  $S$  について  $m^*(S) = 0$  ならば

$S$  のすべての部分集合は可測集合であり、  
その測度は0である

ことを証明せよ

このことから、有理数全体の集合の測度は0なので、  
有限個の数からなる集合の測度も0

有理数の部分集合と  
過不足のない一対一対応 = 全単射をつくること

(証明はテキストの解答例で)