

## 2023 年度秋学期 応用数学（解析） 第 14 回演習の解答例

集合  $S$  の部分集合  $T$  を考えると、 $T \subseteq S$  です。任意の集合  $X$  について、 $T \cap X \subseteq S$  なので、本文の外測度の性質 2 から

$$m^*(T \cap X) \leq m^*(S) = 0 \quad (\text{A1})$$

で、外測度は 0 以上なので、 $m^*(T \cap X) = 0$  です。また、 $T^c \cap X \subset X$  なので、同様に

$$m^*(T^c \cap X) \leq m^*(X) \quad (\text{A2})$$

です。以上から、

$$m^*(X) \geq m^*(T \cap X) + m^*(T^c \cap X) = 0 + m^*(T^c \cap X) = m^*(T \cap X) + m^*(T^c \cap X) \quad (\text{A3})$$

となりますが、集合  $X$  は集合  $T \cap X$  と集合  $T^c \cap X$  の和集合ですから、本文の「完全劣加法性」から  $m^*(X) \leq m^*(T \cap X) + m^*(T^c \cap X)$  です。

よって、 $m^*(X) = m^*(T \cap X) + m^*(T^c \cap X)$  となり、本文の可測集合の定義 ((4) 式) から集合  $T$  は可測集合です。集合  $S$  の外測度  $m^*(S)$  は 0 ですから、集合  $S$  とそのすべての部分集合の測度は 0 となります。