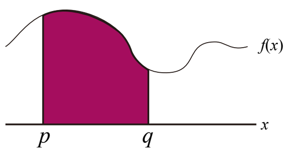
2023年度秋学期 応用数学(解析) 第15回

第4部・「その先の解析学」への導入 **測度論ダイジェスト(2) ルベーグ積分**

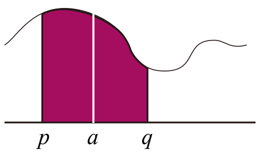
浅野 晃
関西大学総合情報学部

**依然,
積分に対する疑問🤔**

積分に対する疑問



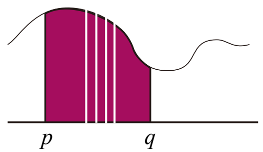
積分 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx$



$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ だから,

a のところで幅0の直線を抜いても
積分の値は変わらない

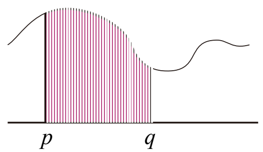
積分に対する疑問



$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

幅0の直線を何本抜いても
積分の値は変わらない

どれだけ拡大してみても,
びっしりと直線がならんでいる

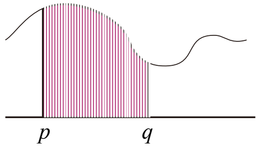


可算無限個の直線を抜いても

積分の値は変わらないのか？

積分に対する疑問(再び)

どれだけ拡大してみても,
びっしりと直線がならんでいる



可算無限個の直線を抜いても
積分の値は変わらないのか?

この疑問に答えるために,
p と q の間にある有理数全体が占める幅を考える
可算無限個ある

有理数全体が占める幅(再び)

可算無限個ある有理数の幅を考えるには
ルベーグ測度の考え方が必要

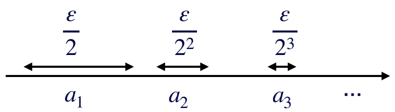
有理数全体の集合が数直線上で持つ幅(測度)

有理数全体を, 区間の組み合わせで覆ったときの
「区間の長さの合計」の下限

有理数全体が占める幅(再び)

ε を任意の正の数とすると

有理数 $a_1, a_2, \ldots$ を　こういうふうに覆うことができる



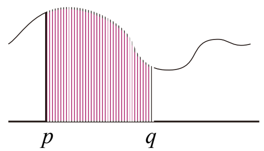
区間の長さの合計

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = \varepsilon$$

その下限は0　有理数全体のルベーグ測度は0

積分に対する疑問

この疑問はまだ解決していない。そもそも,

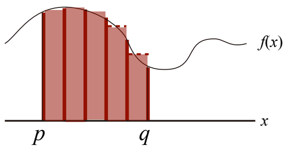


「有理数の位置にある可算無限個の直線を
抜いた」積分は, どうやって求めるのか?

ジョルダン測度にもとづく積分では, 可算無限個の分割はできない

区分求積法で積分を求める(再び)

長方形で近似



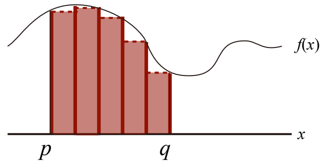
積分 $\int_p^q f(x)dx$ は,

積分区間を 重なりのない, 有限個の 区間に分けて,

その上の長方形の面積の極限

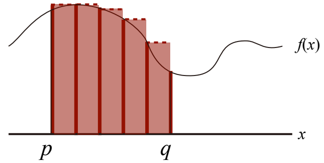
「極限」とは, 無限ではなく有限

ジョルダン測度(再び)



こちらの上限

ジョルダン内測度



こちらの下限

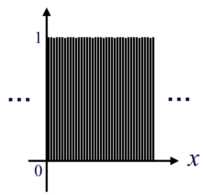
ジョルダン外測度

両者が一致するときジョルダン測度という

2次元の場合これを面積という

ジョルダン測度が定まる図形(集合)をジョルダン可測という

こんな関数の積分は



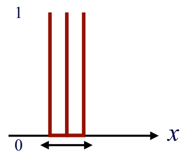
ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

x 軸上をどんなに細かく区切っても,

区切りの中に有理数も無理数も必ず存在する

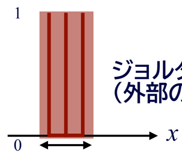
ディリクレ関数の積分



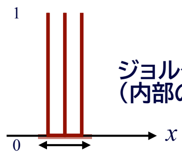
どんな区切りでも,

x 軸上をどんなに細かく区切っても,

区切りの中に有理数も無理数も必ず存在する



ジョルダン外測度
(外部の下限)



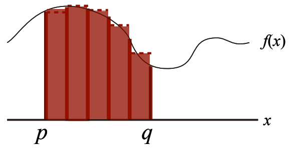
ジョルダン内測度
(内部の上限)

一致しないので, ジョルダン可測でなく, リーマン積分はできない

ルベーグ測度にもとづくルベーグ積分を考える

ルベーグ積分🤔

何がいけなかったのか



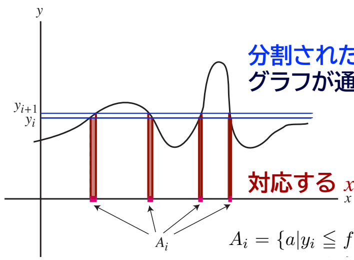
区分求積をするときに，　x 軸上を無理に分割しようとするから，
有限個に分割できないとき困る

y 軸上のほうを分割し，

x 軸のほうは，それに対応して分割されるようにすればいい

ルベーグ積分の考え方

y 軸を分割



分割された y 軸の区間を
グラフが通る部分について

対応する x 軸の区間を得る

$A_i = \{a | y_i \leqq f(a) < y_{i+1}\}$

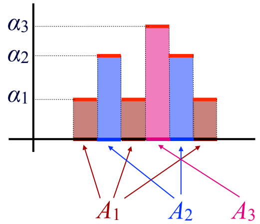
y_i ×(A_i のルベーグ測度)を求める

これを各 y_i について合計したものの，分割を細かくしたときの極限

A_i がたとえ可算無限個に分れていても，
ルベーグ可測なら完全加法性があるから合計できる

単関数とルベーグ積分

[単関数]:
こういう階段状の関数



$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x; A_i)$$

x が A_i にあるとき値が1，他は0
[特性関数]

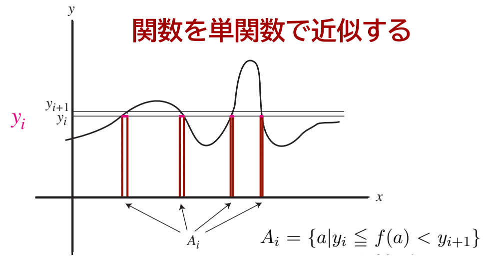
単関数のルベーグ積分

$$\int_A \varphi(x) m(dx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i)$$

α_i × A_i のルベーグ測度

可測関数

関数を単関数で近似する

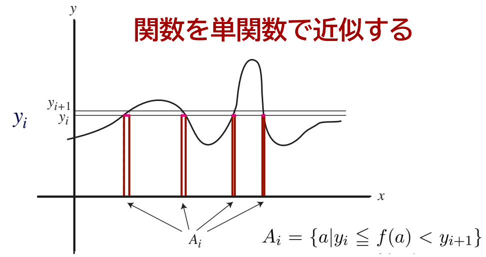


単関数で近似できるためには,
どのように y 軸を分割しても, 図の A_i が可測でなければならない

任意の a, b について $\{x \,|\, a \leq f(x) < b\}$ が可測　［可測関数］

可測関数のルベーグ積分

関数を単関数で近似する



一番よい近似のとき

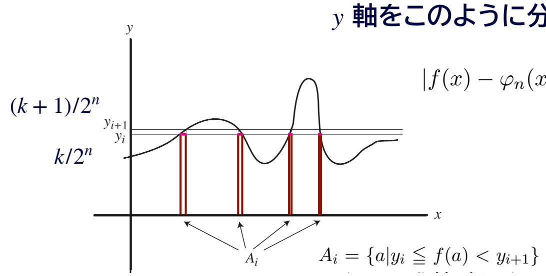
可測関数のルベーグ積分　　単関数で近似

$$\int_A f(x)m(dx) = \sup \int_A \varphi(x)m(dx)$$

可測関数のルベーグ積分

$$\int_A f(x)m(dx) = \sup \int_A \varphi(x)m(dx)$$　本当に sup で近似できるか？

y 軸をこのように分割し, 単関数で近似



$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

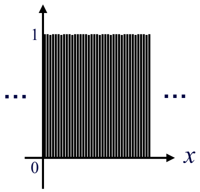
$n \to \infty$ で0

単関数が $f(x)$ に
各点収束する

（もうすこし詳しくは
テキストで）

積分に対する疑問の答💡

ディリクレ関数の積分



ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

$h(x) = 1 \times \varphi(x; \boldsymbol{Q}) + 0 \times \varphi(x; \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q})$ という単関数

x が有理数のとき1　　x が無理数のとき1

有理数のルベーグ測度は0

つまり，$h(x)$ をどんな積分区間で積分しても0

ここまでのまとめ

ルベーグ積分

x 軸を細かく分割するのではなく，
y 軸を分割して，それにしたがって x 軸が分割される

分割された x 軸の区間の長さはルベーグ測度で測るから，
区間が可算無限個あってもよい

x 軸でなくても

ルベーグ可測な集合に対する可測関数ならOK
例：事象の集合と確率

確率と可測集合🎲

標本空間

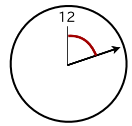
さいころ🎲の各目が出る確率は，いずれも1/6？

すべての可能な目は {1,2,3,4,5,6} で，いずれも
「同様に確からしい」と考えて，それぞれに確率1/6を割り当てている
（ラプラスの定義）

［標本空間］

連続的に動く時計の針を，目を閉じて止める

針と0時の位置との間が，ある角度になる確率？



この角度は標本空間だが，「0°～360°の実数の集合」
なので，要素が可算でない

確率を割り当てることはできない

事象

標本空間の要素ではなく，標本空間の部分集合に確率を割り当てる

[事象]

- 「1または2の目」(が出る)
- 「1時から3時の間の角度」(に止まる)　これらは事象

確率を割り当てることのできる部分集合は，
標本空間を Ω とするとき，次の集合族(部分集合の集合) $\mathscr{F}$ に限る [σ-集合体]

1. $\Omega \in \mathscr{F}$　標本空間全体([全事象])には確率を割り当てる
2. $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$　確率を割り当てられた集合の補集合([余事象])には確率を割り当てる
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$　確率を割り当てられた集合の和集合([和事象])には確率を割り当てる

確率測度

標本空間 Ω と，σ-集合体 $\mathscr{F}$ の組 $(\Omega, \mathscr{F})$ を[可測空間]という

可測空間に割り当てられる測度 P ([確率測度])を，
次の3つを満たすものとする

1. すべての $A \in \mathscr{F}$ について，$P(A) \geqq 0$　確率は正の値または0
2. $P(\Omega) = 1$　全事象の確率は1(「何でもよいから何かがおきる」確率は1)
3. $A_i \in \mathscr{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

排反な各事象の和集合(和事象)に対する確率は
各事象に対する確率の和　(つまり「完全加法性」)

標本空間 Ω と，σ-集合体 $\mathscr{F}$，確率測度 P の組 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を[確率空間]という

確率測度と確率空間の例

コインを1回投げる
表が出るという事象をH，裏が出るという事象をT　標本空間 $\Omega = \{H, T\}$

σ-集合体 $\mathscr{F} = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$　この可測空間に対して，確率測度 P を

$$P(\emptyset) = 0, P(\{H\}) = p, P(\{T\}) = 1 - p, P(\Omega) = 1 \quad (0 \leqq p \leqq 1)$$

と割り当てると，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は確率空間になっている

「正しいコイン」なら，$p = \frac{1}{2}$

一方，

σ-集合体 $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
確率測度 $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$
としても，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$は確率空間になっている

(この続きは「解析応用」テキストで)

問題について🌀

問題の(1)

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ について，集合 $A, B \in \mathscr{F}$ のとき，
$P(\emptyset) = 0$ を証明せよ

$\Omega \quad \emptyset \quad \emptyset$

$A_1 = \Omega, A_i = \emptyset \ (i = 2,3,\ldots)$ とすると $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$

確率測度の定義の条件3より　排反な各事象の和集合(和事象)に対する確率は各事象に対する確率の和

$$P(\underline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

$$P(\Omega) = P(\Omega) + \underline{\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)}$$

条件2より
$P(\Omega) = 1$

ここは0

条件1より
$P(\cdot) \geqq 0$ **だから**
$P(\emptyset) = 0$

(問題(2)～(5)についてはテキストの解答例で)