

2023年度秋学期 画像情報処理 第3回  
 フーリエ級数とフーリエ変換

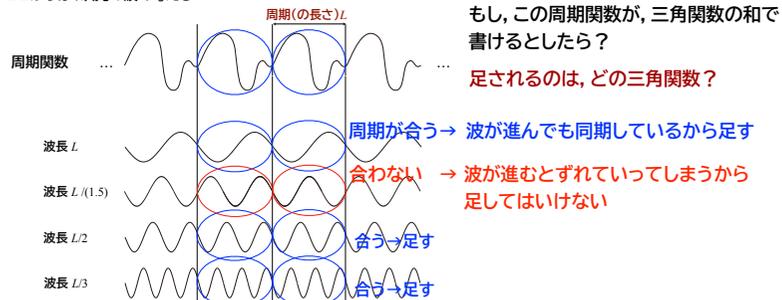
浅野 晃  
 関西大学総合情報学部



フーリエ級数

周期関数を分解

ここからは1次元の波で考える



もし、この周期関数が、三角関数の和で書けるとしたら？  
 足されるのは、どの三角関数？

… 足されるのは波長  $L/n$  ( $n$ は整数)のものに限る。  
 無限個の波の足し合わせだが、足し算(級数)で書ける。

「無限個だが、足し算で書ける」



周期関数  $f(x)$  ...

周期関数  $f(x)$ が、三角関数の和で書けるとしたら、足されるのは

$$f(x) = \text{波長 } L + \text{波長 } L/2 + \text{波長 } L/3 + \dots + \text{波長 } L/n + \dots$$

… 足されるのは波長  $L/n$  ( $n$ は整数)のものに限るから、無限個の三角関数を足すのだけれどもこのように「項」を並べることはできる  
 「級数」という

## 周期関数 = 三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{L} x\right) + a_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{L} x\right) + \dots + a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{L} x\right) + \dots$$

波長  $L$                   波長  $L/2$                   波長  $L/n$

なのですが...

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \}$$

指数関数なら計算が簡単

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{かけ算 = 指数の足し算}$$

## 三角関数と指数関数の関係

$i^2 = -1$  虚数単位

オイラーの式  $\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$        $\exp(x) = e^x$        $(e^x)' = e^x$

↓

$$\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$$

$$\exp(-i\omega) = \cos(-\omega) + i \sin(-\omega)$$

$$= \cos \omega - i \sin \omega$$

微分しても変わらない  
 $e = 2.71828\dots$

足し算すると

$$\exp(i\omega) + \exp(-i\omega) = 2 \cos \omega$$

引き算すると

$$\exp(i\omega) - \exp(-i\omega) = 2i \sin \omega$$

$$\cos \omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}$$

$$\sin \omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

## 三角関数と指数関数の関係

オイラーの式  $\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$

↓

$$\cos \omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2} \quad \sin \omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

ひとつの三角関数 = 波は、  
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが、  
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる

## 周期関数を指数関数の和で

波長  $L/n$  の波は  $\exp(i2\pi \frac{n}{L} x)$  と  $\exp(-i2\pi \frac{n}{L} x)$  の組

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  は、波長  $L/n$  の波を足し合わせて

プラスもマイナスも $\infty$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

と書ける はず。

## 書ける, のはいいが

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  は, 波長  $L/n$  の波を足し合わせて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

と書ける はず。

この係数はどうやって求めるの？

## ある波長の波を切り出す

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$  から, 波長  $L/n$  の波に  
対応する指数関数だけを切り出したい

波長  $L/n$  の指数関数  $\exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$

一方,  $f(x)$  を構成する指数関数のいずれか(波長  $L/m$ )は

$$\exp\left(i2\pi \frac{m}{L}x\right)$$

## ある波長の波を切り出す

波長  $L/m$  の指数関数と  $L/n$  の指数関数についてこういう計算を試みる

$f(x)$  の1周期分だけ積分(積分については後半で)

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underbrace{\exp\left(i2\pi \frac{m}{L}x\right)}_{\text{波長 } L/m} \underbrace{\exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right)}_{\text{波長 } L/n} dx$$

複素共役

この答は  $m$  と  $n$  が異なるとき(別の波長)  $0$

$m$  と  $n$  が等しいとき(同じ波長)  $L$

指数関数はこの  
「同期しないと積分が0」という性質をもつ 直交関数系

## フーリエ級数展開とフーリエ係数

そこで  $\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx$  を計算してみる

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \text{ なので}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx$$

級数の各項を積分すると,  $n=k$  の項だけは積分すると  $L$

他の項は積分すると  $0$

つまりこの積分の答は  $\frac{1}{L} \cdot L a_k = a_k$  係数が求まった

## まとめ・フーリエ級数展開とフーリエ係数

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

という波の足し合わせ(級数)で表される(フーリエ級数展開)

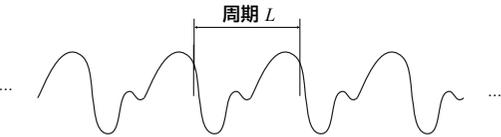
係数  $a_n$ (フーリエ係数)は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right) dx \quad \text{という積分で表される}$$

フーリエ変換 🤔

## 周期関数は, フーリエ級数で表される

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$

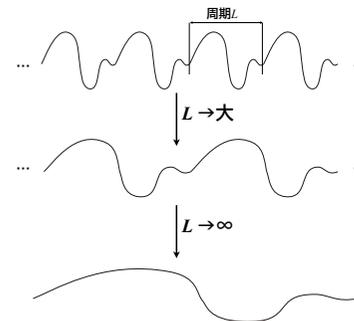


$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \quad \text{という, 波の足し合わせ(級数)で表される}$$

(フーリエ級数展開)

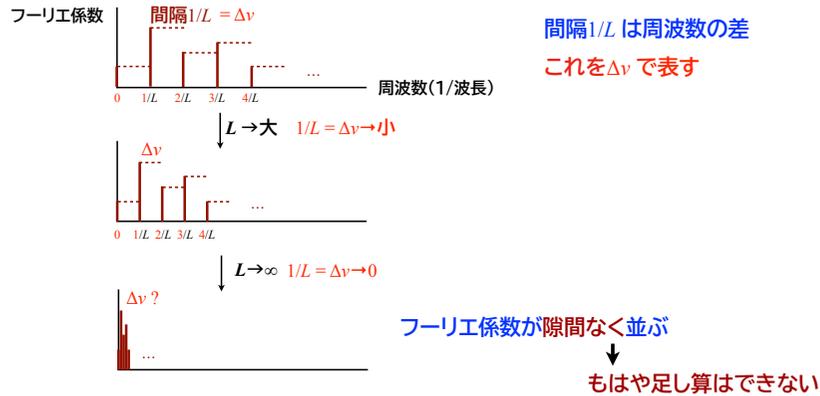
$$\text{係数 } a_k \text{ (フーリエ係数) は } a_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx$$

## 周期関数でない場合は?



非周期関数は周期が無限大と考える

## 周期 L が大きくなっていくと



## 級数から積分へ

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right) dx$$

$1/L = \Delta\nu$  と書き換える

紛らわしいので別の文字にだけ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n \Delta\nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n \Delta\nu x)$$

## 級数から積分へ

$n\Delta\nu$  はある周波数を表すので,  $\nu$  であらわす

$L \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\nu \rightarrow 0$

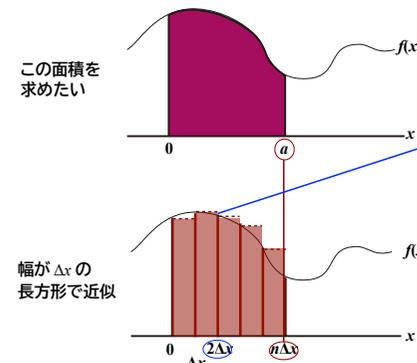
このとき  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n \Delta\nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n \Delta\nu x)$  のなかの総和( $\Sigma$ )が,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi \nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi \nu x) d\nu$$

という積分になる

???

## 積分とは？



★ところで:  
長方形の面積 = 縦 × 横？

長方形の面積は、有限個の正方形を敷き詰めたときの正方形の面積の合計 (有限加法性)

正方形の面積は「定義」

短冊の面積の合計

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x) \Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$  区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x) dx$$

これが積分

## 級数から積分へ

$n\Delta\nu$  はある周波数を表すので、 $\nu$  であらわす  
 $L \rightarrow \infty$  のとき  $\Delta\nu \rightarrow 0$

このとき  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n\Delta\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n\Delta\nu x)$  のなかの総和( $\Sigma$ )が、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

という積分になる

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x) \Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$  区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x) dx$$

!!!  
 積分では、  
 幅  $d\nu$  が大事です

## フーリエ変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$$

と分けて書く

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

フーリエ変換対 という

## フーリエ変換

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$$

フーリエ変換

関数  $f(x)$  にどのような周波数の波がどれだけ含まれているか、「波を切り出す」

フーリエ係数の並びだったのが、周波数の間隔がどんどん小さくなって、  
 ついにはひとつの関数  $F(\nu)$  になる

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

逆フーリエ変換

周波数  $\nu$  の波  $\exp(i2\pi\nu x)$  に、対応するフーリエ係数  $F(\nu)$  をかけたものを  
 合計(積分)すると  $f(x)$  に戻る

## 2次元の場合は

1次元のフーリエ変換  $F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$

2次元のフーリエ変換  $F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$

この式は、 $x, y$  それぞれに1次元のフーリエ変換をしたことになっている

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy$$

注:  $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$   
 足し算 かけ算