2023年度秋学期 画像情報処理　第4回

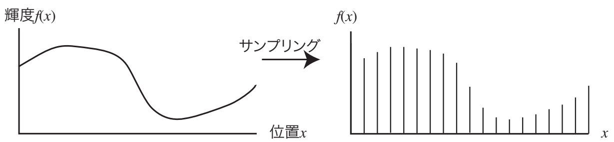
フーリエ変換とサンプリング定理

浅野 晃
関西大学総合情報学部

サンプリングとサンプリング定理🤔

サンプリングとサンプリング定理

連続関数を　　離散的に



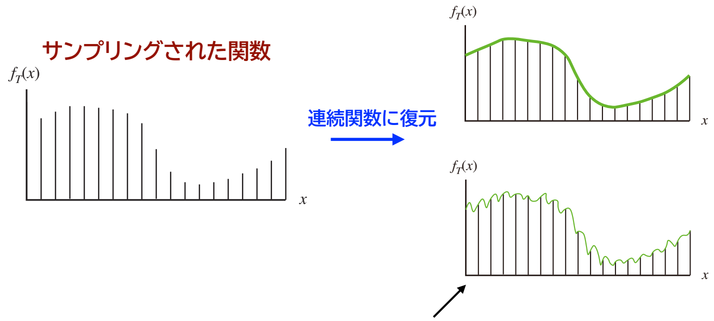
サンプリング定理

ある程度細かい間隔でサンプリングすれば，もとの連続関数に戻せる

どのくらい細かくなければならないかは，
もとの関数に含まれる最高の周波数による

「細かい」関数は
細かくサンプリング

サンプリング定理・直観的には



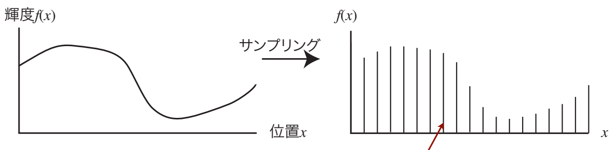
これが正解？

これだって
正解じゃないの？

もしこのような細かい動きが正解だとすれば，
細かい動きをとらえるにはサンプリングが粗すぎる，つまり
元の連続関数の最高の周波数に対して十分細かくサンプリングされていない

サンプリングとは

連続関数を　　　　離散的に



この1本1本は何？　　ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

$x = 0$ の1点以外すべてゼロ

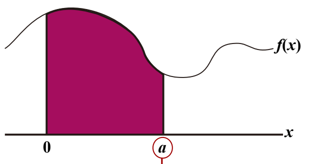
$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x = 0$ をはさんで積分すると1

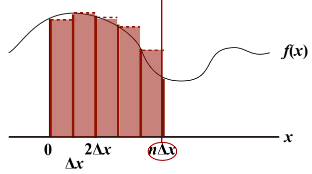
何ですかこれ？？😲

積分って何でしたっけ

この面積を
求めたい



幅が Δx の
長方形で近似



🤔💬

しかし，デルタ関数は
1点以外すべてゼロで幅はないから
面積もないはず…

短冊の面積の合計

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

↓ $\Delta x \to 0$　区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$　これが積分

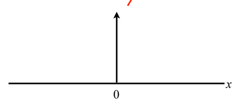
ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

$x = 0$ の1点以外すべてゼロ

$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x = 0$ をはさんで積分すると1

高さは，何だともいえない　（「無限」でもない。なぜなら→ $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x)dx = k$

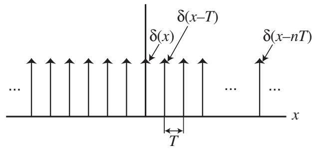


幅はなくても面積はあるんです。
だから，こんな「↑」で表さざるを得ない

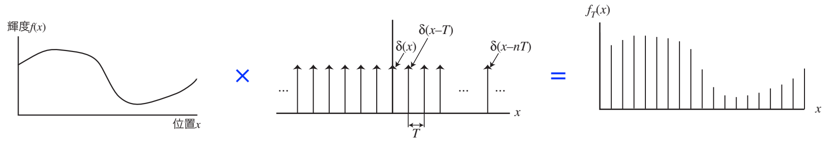
くし形関数 $\mathrm{comb}_T(x)$ とサンプリング

くし形関数 $\mathrm{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$

デルタ関数を等間隔に並べたもの



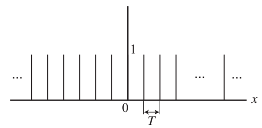
サンプリングとは，くし形関数とのかけ算　$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x)$



こんなややこしい関数でなければいけないの？

ディラックのデルタ関数ではなく，「縦棒」を並べて，くし形関数にしてはだめ？

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$



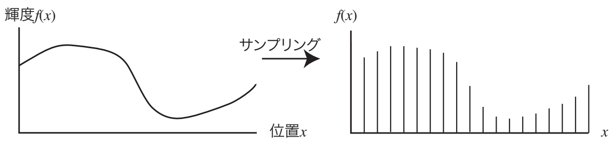
だめです🙅

縦棒の関数は，幅がなくて高さ1だから，積分したらゼロ
→画像の輝度の合計がゼロのはずはない

ディラックのデルタ関数は，幅がないのに積分したら1 というヘンな関数（超関数）

※ただ，こういうややこしい話になっているのは，「積分」をもとに考えを進めているからでもあります。
そのあたりは，次回の「離散フーリエ変換」で説明します。

サンプリングされたら，周波数の範囲は？



周波数がある範囲内におさまっているとき　　サンプリングした後の周波数の範囲は？

サンプリングされた関数である $f_T(x)$ のフーリエ変換を求める

$$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x)$$

2つの関数のかけ算のフーリエ変換は？

かけ算のフーリエ変換

こうなります

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu)$$

かけ算のフーリエ変換　　フーリエ変換と　　フーリエ変換の

？？？🤔

＊は，コンヴォリューション（畳み込み）といいます

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

その意味は，少し後で…

サンプリングされた関数のフーリエ変換

つまり

$$\underbrace{FT[f_T(x)](\nu)}_{\text{サンプリングされた関数のフーリエ変換は}} = \underbrace{FT[f(x)](\nu)}_{\text{もとの関数のフーリエ変換と}} * \underbrace{FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu)}_{\text{くし形関数のフーリエ変換の}}$$

コンヴォリューション

くし形関数のフーリエ変換は

$$FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T}\mathrm{comb}_{1/T}(\nu)$$

くし形関数のフーリエ変換はくし形関数, ただし間隔が逆数

くし形関数とのコンヴォリューション

$$\underbrace{FT[f_T(x)](\nu)}_{\text{サンプリングされた関数のフーリエ変換は}} = \underbrace{FT[f(x)](\nu)}_{\text{もとの関数のフーリエ変換と}} * \underbrace{FT[\mathrm{comb}_T(x)](\nu)}_{\text{くし形関数のフーリエ変換の}}$$

コンヴォリューション

「くし形関数とのコンヴォリューション」とは？

「デルタ関数とのコンヴォリューション」を並べたもの

デルタ関数とのコンヴォリューション

ある何かの関数 $f(t)$

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(\underline{t-y})dy$$

デルタ関数はここが0のとき以外はゼロ → 積分してもゼロ

$t=0$のとき $f(t) * \delta(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(-y)dy$

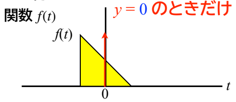
$y=0$ のとき以外は積分に無関係

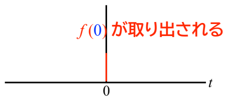
$t=1$のとき $f(t) * \delta(t)|_{t=1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(1-y)dy$

$y=1$ のとき以外は積分に無関係

ある何かの関数 $f(t)$

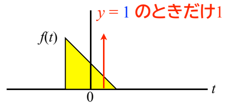
デルタ関数を積分すると $y=0$ のときだけ 1





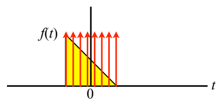
$f(0)$ が取り出される

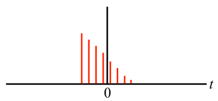
デルタ関数は積分すると $y=1$ のときだけ1



$f(1)$ が取り出される

デルタ関数とのコンヴォリューション

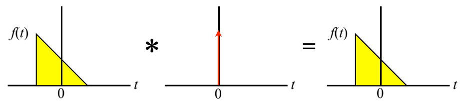




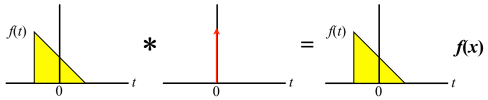
$t=\alpha$ のとき, $f(\alpha)$が取り出される

つまり

$f(x)$ とデルタ関数のコンヴォリューションは, $f(x)$ 自身



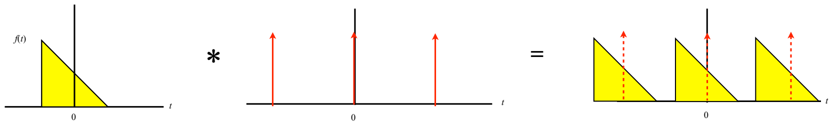
くし形関数とのコンヴォリューション



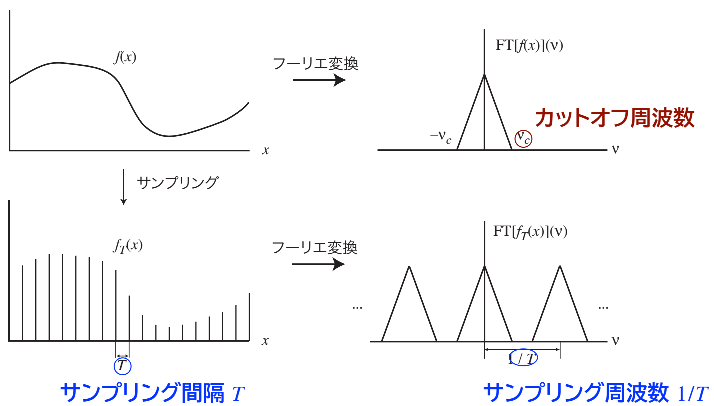
$f(x)$ とデルタ関数のコンヴォリューションは, $f(x)$ 自身

くし形関数は, デルタ関数が等間隔に並んでいる

くし形関数とのコンヴォリューションは, 元の関数の「コピー」が等間隔に並んだものになる

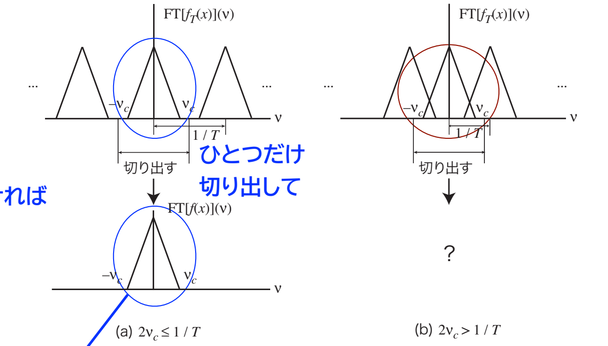


まとめると・サンプリングとフーリエ変換



周波数空間での間隔

サンプリング周波数($1/T$)が,
カットオフ周波数の2倍以上細かければ



これを
逆フーリエ変換して
元の関数に戻せる

サンプリング間隔が粗いと, 周波数空間で重なり
合ってしまい元には戻せない (エイリアジング)

まとめ・サンプリング定理

ある関数(画像でも, 音声でも)を, それのもつ最大の周波数の2倍以上の細かさでサンプリングしておけば,

サンプリングされたもの(ディジタル画像, ディジタル音声)から
元の関数(画像や音声)を再現できる

例)CDはサンプリング周波数が44.1kHz
→22.05kHzまでの音声が記録できる
22.05kHzまでしか含まれていないとわかっているときには
正しく記録できる
(録音時に, それ以上の周波数の成分が入らないように
しなければならない)