2023年度秋学期 画像情報処理　　第5回

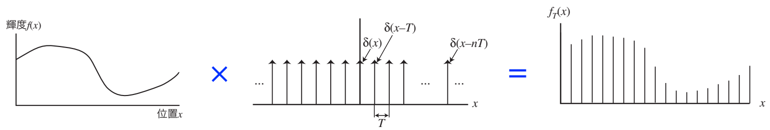
離散フーリエ変換，フーリエ変換の実例

浅野 晃
関西大学総合情報学部

離散フーリエ変換🤔

サンプリングされた関数のフーリエ変換

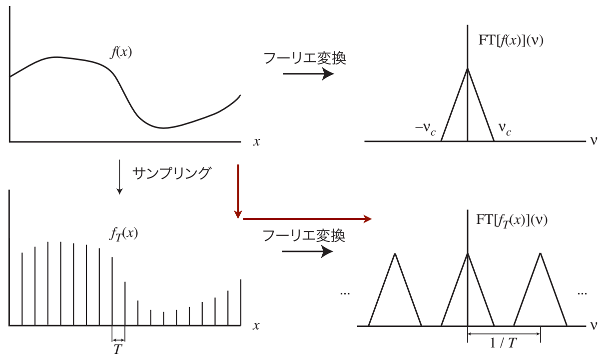
サンプリング　$f_T(x) = f(x)\mathrm{comb}_T(x)$



サンプリングされた関数のフーリエ変換

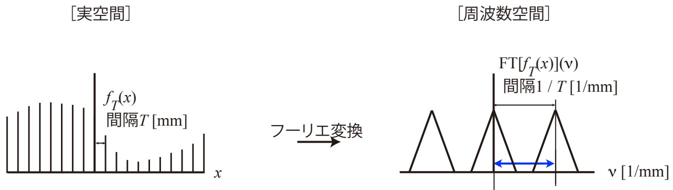
$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)\mathrm{comb}_T(x)](\nu)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{comb}_T(x)\exp(-i2\pi\nu x)dx$$

サンプリングされた関数のフーリエ変換



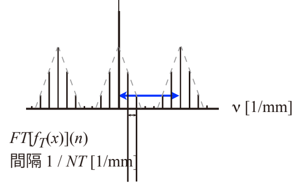
こちらは離散的だが　　こちらは離散的でない→コンピュータで扱えない

周波数空間でもサンプリング



周波数空間で, 1周期あたり

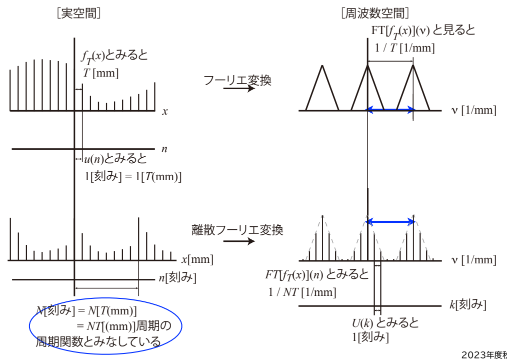
N 点のサンプリングをする



実空間ではどうなる？

実空間でサンプリング→周波数空間で周期的に現れる

周波数空間でサンプリング→実空間で周期的に現れる

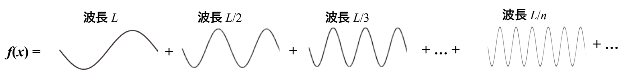


「周波数空間でサンプリング」とは

周波数空間でサンプリング→実空間で周期的に現れる 🤔

周波数空間でサンプリング, つまり「周波数がとびとび」

それはつまり

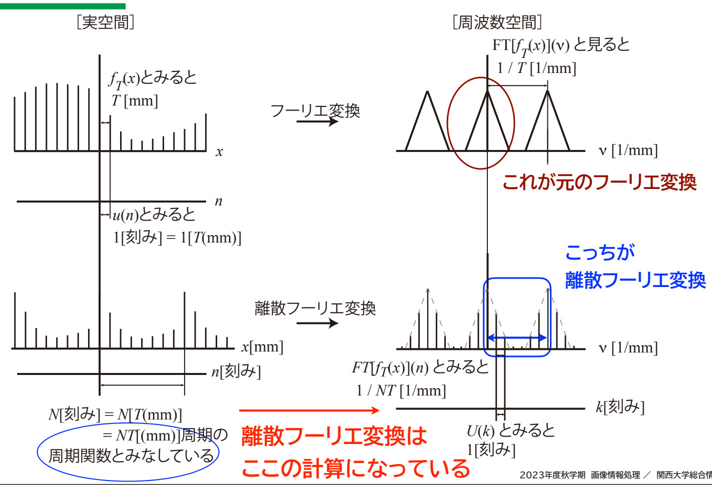


フ ー リ エ 級 数

ということは, 周期関数を三角関数の足し合わせで表している

離散フーリエ変換

元のフーリエ変換とはだいぶ違う

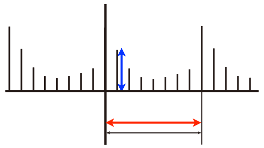


数列の計算にする

元の関数は忘れて，サンプリングされたものを数列とみなす

デルタ関数の並びではなく，単に間隔 T でとびとびに取り出された関数の値を数列 $u(n)$ とする

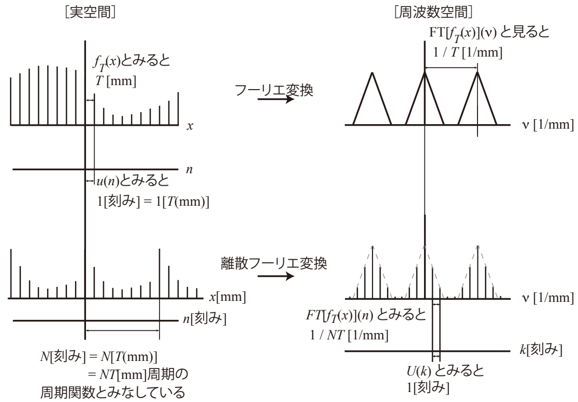
デルタ関数の並びの積分だったのが
→数列の場合は，そこの値を合計するだけ



離散フーリエ変換（DFT）

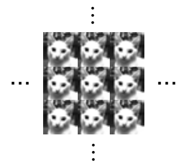
$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{N} n\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

離散フーリエ変換



 の離散フーリエ変換は

実際には



という
周期関数と
みなしている

フーリエ変換の実例💡
（MATLABを使って示します）

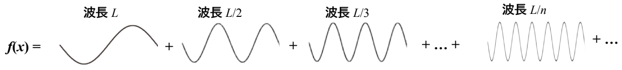
テキスト付録1：
周波数空間でのサンプリングと，実空間での周期関数の関係🤔

「周波数空間でサンプリング」とは

周波数空間でサンプリング→実空間で周期的に現れる 🤔

周波数空間でサンプリング，つまり「周波数がとびとび」

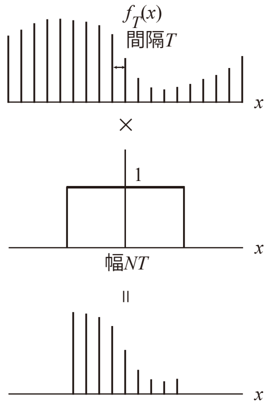
それはつまり



フーリエ級数

ということは，周期関数を三角関数の足し合わせで表している

「実空間の周期関数」のほうから考えてみる



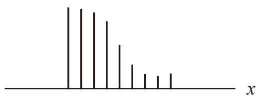
実空間でサンプリングされた関数 $f_T(x)$

幅 NT だけ切り出す矩形関数 $\mathrm{rect}(\frac{x}{NT})$

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > \frac{1}{2}) \\ 1 & (|x| < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

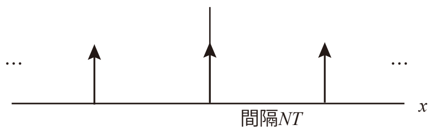
切り出した $f_T(x) \times \mathrm{rect}(\frac{x}{NT})$

サンプリングして，さらに周期関数にする



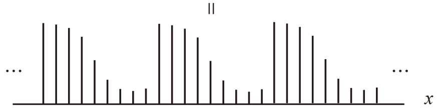
切り出された $f_T(x) \times \mathrm{rect}(\frac{x}{NT})$

$*$ コンヴォリューション



間隔 NT のくし形関数 $\mathrm{comb}_{NT}(x)$

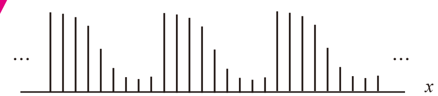
=



周期 NT の周期関数にした

$f_T(x) \times \mathrm{rect}(\frac{x}{NT}) * \mathrm{comb}_{NT}(x)$

そのフーリエ変換は



周期 NT の周期関数になった

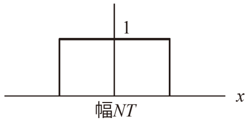
$f_T(x) \times \mathrm{rect}(\frac{x}{NT}) * \mathrm{comb}_{NT}(x)$

そのフーリエ変換は

$$FT[f(x)\mathrm{comb}_T(x) \times \mathrm{rect}(\frac{x}{NT}) * \mathrm{comb}_{NT}(x)]$$
$$= FT[f(x)\mathrm{comb}_T(x)] * FT[\mathrm{rect}(\frac{x}{NT})] \times FT[\mathrm{comb}_{NT}(x)]$$

フーリエ変換すると
× → ∗ 　かけ算はコンヴォリューションに
∗ → × 　コンヴォリューションはかけ算に

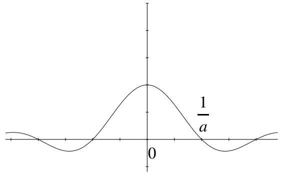
矩形関数のフーリエ変換は



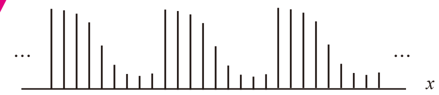
幅 a の矩形関数 $\mathrm{rect}(\frac{x}{a})$ の
フーリエ変換は

$$FT[\mathrm{rect}(\frac{x}{a})] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\frac{x}{a}) \exp(-i2\pi\nu x)dx$$
$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-i2\pi\nu x)dx$$
$$= \frac{1}{-i2\pi\nu}[\exp(-i2\pi\nu x)]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$
$$= \frac{1}{i2\pi\nu}(\exp(i\pi a\nu) - \exp(-i\pi a\nu))$$
$$= \frac{\sin(a\pi\nu)}{\pi\nu}$$

sinc関数といい, $\mathrm{sinc}(a\nu)$ で表す



サンプリング／周期化してフーリエ変換すると



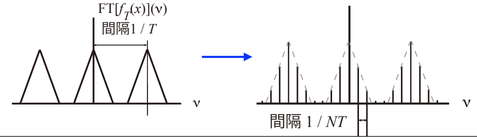
周期 NT の周期関数になった

$$f_T(x) \times \mathrm{rect}(\frac{x}{NT}) * \mathrm{comb}_{NT}(x)$$

これのフーリエ変換は $\underline{FT[f_T(x)] \times \mathrm{comb}_{\frac{1}{NT}}(x\nu)} * \underline{\mathrm{sinc}(\frac{\nu}{1/(NT)})}$

実空間でサンプリングされた $f_T(x)$ のフーリエ変換を
間隔 NT でサンプリング

こっちは？

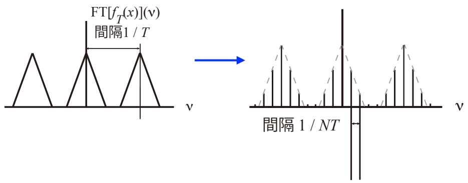


sinc関数はどうなるのか？

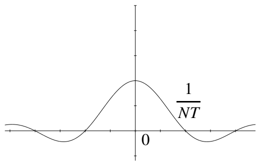
$$\underline{FT[f_T(x)] \times \mathrm{comb}_{\frac{1}{NT}}(x\nu)} * \underline{\mathrm{sinc}(\frac{\nu}{1/(NT)})}$$

実空間でサンプリングされた $f_T(x)$ のフーリエ変換を
間隔 NT でサンプリング

デルタ関数の間隔 $1/(NT)$ の並びと
sinc関数のコンヴォリューション



sinc関数 $\mathrm{sinc}(\frac{\nu}{1/(NT)})$ が
間隔 $1/(NT)$ で並ぶ



$\mathrm{sinc}(\frac{\nu}{1/(NT)})$ は 間隔 $1/(NT)$ ごとにゼロになるから,
間隔 $1/(NT)$ で並んだsinc関数の影響はない

テキスト付録2：
離散フーリエ変換すると
データサイズが2倍に増えているのか？🤔

離散フーリエ変換の結果は複素数

N個の実数値は, N個の複素数値に変換される

複素数は $a + bi$ の形で, 2つの実数の組になっている

離散フーリエ変換によって,
データの大きさが2倍になっているのか？🤔

そんなことはないはずです。

離散フーリエ変換と対称性

数列 $u(n)$ を離散フーリエ変換したものが 数列 $U(k)$ であるとき

$U^*(N-k) = U(k)$ という対称性がある

*は複素共役
$U = a + bi$ のとき, $U^* = a - bi$

なぜならば, 👉

離散フーリエ変換と対称性

数列 $u(n)$ を離散フーリエ変換したものが 数列 $U(k)$ であるとき

$U^*(N-k) = U(k)$ なぜならば, 👉

$u(n)$ が実数ならば, $u^*(n) = u(n)$ なので

$$\begin{aligned} U^*(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} u^*(n) \exp(i2\pi \frac{N-k}{N} n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(i2\pi n) \exp(i2\pi \frac{-k}{N} n) \end{aligned}$$

離散フーリエ変換と対称性

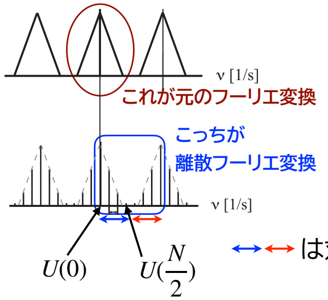
$$\begin{aligned} U^*(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} u^*(n) \exp(i2\pi \frac{N-k}{N} n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(i2\pi n) \exp(i2\pi \frac{-k}{N} n) \end{aligned}$$

n が整数のとき 指数関数と三角関数の関係から
$\exp(i2\pi n) = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1 + 0 = 1$, よって

$$U^*(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(i2\pi \frac{-k}{N} n) = U(k)$$

やっぱりデータサイズは2倍にはなってない

n が整数のとき 指数関数と三角関数の関係から
$\exp(i2\pi n) = \cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n) = 1 + 0 = 1$, よって



↔↔ は対称

$u(n)$ が実数ならば, $U^*(k) = U(N-k)$ なので
離散フーリエ変換で表されている
最大の周波数は $N/2$

「指数関数2つの組でひとつの波」だから,
当然といえば当然ですね

第2部へ

第2部は画像データ圧縮

画像の細かいところを, 見た目にはわからないようにごまかして, データ量を減らす

「細かいところ」はどのように表現されるか？
→周波数で表現される

そういうわけで, もう少しフーリエ変換とおつきあいください。

もっと一般的な原理から説明します。まずは数学の「行列」から。