


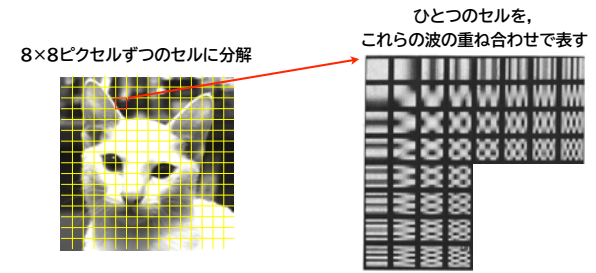
2023年度秋学期 画像情報処理 第9回  
離散フーリエ変換と離散コサイン変換

浅野 晃  
関西大学総合情報学部



## JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし、一部を省略して、データ量を減らす

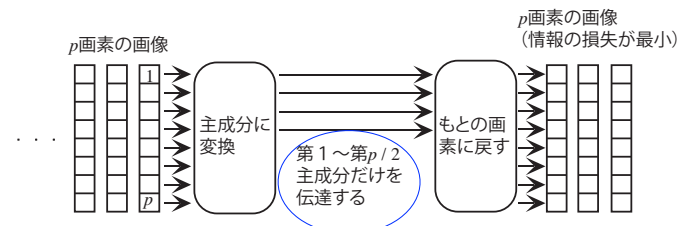


細かい部分は、どの画像でも大してかわらないから、省略しても気づかない

省略すると、データ量が減る

## Karhunen-Loève変換(KL変換)

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも  
情報の損失は最小

## KL変換の大問題

主成分を求めるには、分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには、  
「いまから取り扱うすべての画像」が  
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能🙄

## そこで


ベクトルの直交変換を、行列の直交変換におきかえることで、  
どういう変換かが見えるようにする

原画像 $X$ は、 $m^2$ 個の基底画像にそれぞれ  
変換後画像 $Z$ の各要素をかけて足し合わせたものになっている

どういう直交変換(ユニタリー変換)を用いるかを、基底画像を目でみて決める

$$X = z_{11}r_1r'_1 + z_{12}r_1r'_2 + \cdots + z_{mm}r_mr'_m$$

こんな「基底画像セット」なら、  
最後の方の基底画像は  
ごまかせそうだ



基底画像 基底画像 基底画像

## そこで

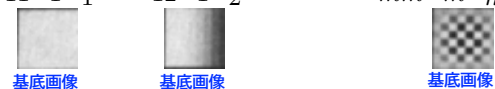
ベクトルの直交変換を、行列の直交変換におきかえることで、  
どういう変換かが見えるようにする

原画像 $X$ は、 $m^2$ 個の基底画像にそれぞれ  
変換後画像 $Z$ の各要素をかけて足し合わせたものになっている

どういう直交変換(ユニタリー変換)を用いるかを、基底画像を目でみて決める

$$X = z_{11}r_1r'_1 + z_{12}r_1r'_2 + \cdots + z_{mm}r_mr'_m$$

基底画像として  
波を用いる  
フーリエ変換

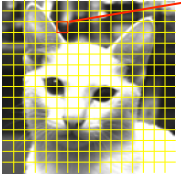


基底画像 基底画像 基底画像

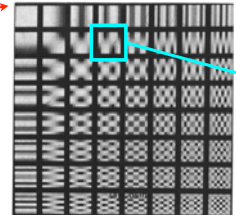
## JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし、一部を省略して、データ量を減らす

8×8ピクセルずつのセルに分解



ひとつのセルを、  
これらの波の重ね合わせで表す



このひとつ  
ひとつが  
基底画像

細かい部分は、どの画像でも大してかわら  
ないから、省略しても気づかない  
省略すると、データ量が減る

2次元離散フーリエ変換を行列で🤖

## 2次元フーリエ変換

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$$

指数関数の性質から

$$\begin{aligned} F(\nu_x, \nu_y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) \exp(-i2\pi\nu_y y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy \end{aligned}$$

x方向のフーリエ変換    y方向のフーリエ変換

2次元フーリエ変換は分離可能

## 2次元離散フーリエ変換

1次元離散フーリエ変換

$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} n) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

2次元離散フーリエ変換(分離可能な形式)

$$U(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} u(m, n) \exp(-i2\pi \frac{k}{M} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

縦横の大きさが同じなら

$$U(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} u(m, n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

## 離散フーリエ変換を行列で表す

行列の直交変換の形で表す  $Z = RXR'$

$$U(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} u(m, n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$



$${}^l\downarrow(Z = U(k, l)) = {}^l\downarrow(R) \cdot {}^n\downarrow(X = u(m, n)) \cdot {}^m\downarrow(R')$$

## 離散フーリエ変換を行列で表す

前ページのように行列を配置すると

$$R' = \begin{pmatrix} e^{-i2\pi \frac{0}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{k}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{0}{N} m} & & e^{-i2\pi \frac{k}{N} m} & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{0}{N} (N-1)} & & & & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} (N-1)} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} e^{-i2\pi \frac{0}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{0}{N} n} & \dots & e^{-i2\pi \frac{0}{N} (N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{0}{N} 0} & & e^{-i2\pi \frac{l}{N} n} & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} 0} & & & & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} (N-1)} \end{pmatrix}$$

## 離散フーリエ変換を行列で表す

指数関数がややこしいので

$$W_N = \exp\left(-\frac{i2\pi}{N}\right)$$

とおくと,

$$R = \begin{pmatrix} W_N^{0 \cdot 0} & \dots & W_N^{0 \cdot n} & \dots & W_N^{0 \cdot (N-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \\ W_N^{l \cdot 0} & & W_N^{l \cdot n} & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ W_N^{(N-1) \cdot 0} & & & & W_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix}$$

$$Z = R X R$$

## ところで、本当にユニタリー？

「ある列」と「ある列の複素共役」の内積

異なる列なら0, 同じ列なら1 ならユニタリー

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{ln} \cdot (W_N^{ln'})^* &= \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{i2\pi ln}{N}\right) \exp\left(\frac{i2\pi ln'}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{i\{(n-n')2\pi\}l}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} \end{aligned}$$

異なる列(等比数列の和)

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} &= \frac{1 - W_N^{(n-n')N}}{1 - W_N^{(n-n')}} \\ &= \frac{1 - (W_N^N)^{(n-n')}}{1 - W_N^{(n-n')}} \\ &= \frac{1 - 1^{(n-n')}}{1 - W_N^{(n-n')}} = 0 \quad \text{OK} \end{aligned}$$

同じ列

$$\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = N \quad \text{NG}$$

## ユニタリー離散フーリエ変換

いままでに説明した  $R$  だと  $RR^* = N I$   
ユニタリーでない

$$W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{i2\pi}{N}\right) \quad \text{とおけば}$$

$$RR^* = I \quad \text{となって, ユニタリーになる} \quad \begin{aligned} Z &= R X R \\ X &= R^* Z R^* \end{aligned}$$

離散フーリエ変換はユニタリー変換の一種である

→ 離散フーリエ変換も「座標の回転」の一種である

「画素値の並び」から、「波」を表す基底画像の組み合わせへ

離散コサイン変換 🤔

## 離散コサイン変換

フーリエ変換では、**複素数**を扱う必要がある  
 そこで、**実数**だけで計算できる変換 JPEG方式もこれを用いている

$$R = \begin{matrix} & n \rightarrow \\ \downarrow & \left( \begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & r(n, l) & \\ & & \ddots \end{array} \right) \\ & \end{matrix}$$

$$r(n, l) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & l = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{2N} & l \neq 0 \end{cases}$$

## 離散コサイン変換とフーリエ変換

離散コサイン変換は、**関数を折り返して偶関数にしたもののフーリエ変換**に相当

偶関数 ( $f(x) = f(-x)$ ) のフーリエ変換は、**実数の計算**になる

$$F(\nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx$$

第1項の  $x$  を  $-x$  に変数変換

$$F(\nu_x) = \left( \int_{-\infty}^0 f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx \right) + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx$$

## 偶関数のフーリエ変換

つまり

$$F(\nu_x) = \int_0^{\infty} f(x) \exp\{i2\pi(\nu_x x)\} dx + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx$$

$$F(\nu_x) = \int_0^{\infty} f(x) [\exp\{i2\pi(\nu_x x)\} + \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\}] dx$$

指数関数と三角関数の関係から

$$F(\nu_x) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi(\nu_x x) dx \quad \text{実数の計算になる}$$

## 離散コサイン変換

離散コサイン変換は、**関数を折り返して偶関数にしたもののフーリエ変換**に相当

1次元の場合

折り返す

$$u(N-1), u(N-2), \dots, u(1), u(0) \quad u(0), u(1), \dots, u(N-2), u(N-1)$$

$2N$  要素の数列

## 離散コサイン変換

$N$  要素の離散コサイン変換は 
$$U(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) & k = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}} u(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} & k \neq 0 \end{cases}$$

$k \neq 0$  の場合を考えると

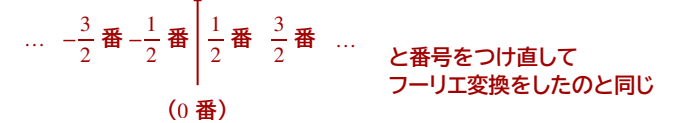
$$\begin{aligned} U(k) &= \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} && \text{cos を指数関数で表す} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{i(2n+1)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(2n+1)k\pi}{2N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i((-n)-1/2)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(n+1/2)k\pi}{2N} \end{aligned}$$

## 離散コサイン変換

$$U(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i((-n)-1/2)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(n+1/2)k\pi}{2N}$$

これは、折り返した数列に対して

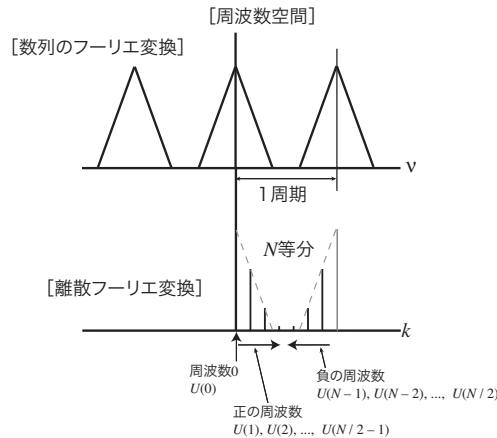
$$u(N-1), u(N-2), \dots, u(1), u(0) \quad u(0), u(1), \dots, u(N-2), u(N-1)$$



2N項のフーリエ変換をしていることになるので、  
 $k = 0$  が周波数0,  $k = 1, \dots, N-1$  の順に周波数が高くなる

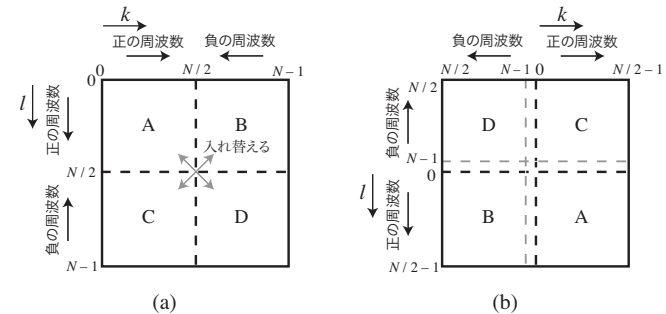
## 離散フーリエ変換と正負の周波数

1次元の離散フーリエ変換では  
こういう折り返し



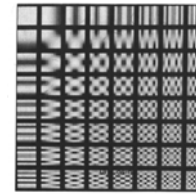
## 離散フーリエ変換と正負の周波数

2次元の離散フーリエ変換でもこういう折り返しがあったが、  
離散コサイン変換では折り返しはない

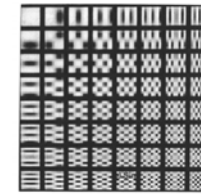


実例

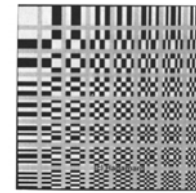
## 基底画像の例



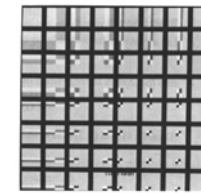
コサイン変換



サイン変換



Hadamard変換(-1と1)

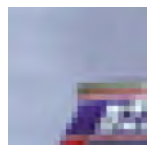


Haar変換

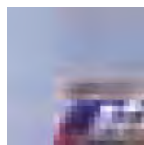
A. K. Jain, Fundamentals of  
B. Digital Image Processing (1988)

## 画像情報圧縮の例

データ量:80KB



データ量:16KB



(8×8ピクセルのセルが見える)

## リングング(モスキートノイズ)



※粗い波だけを重ねて  
エッジ(明暗の境界線)を  
表すと生じる