

2023年度秋学期 画像情報処理 第10回
Radon変換と投影切断面定理

浅野 晃
関西大学総合情報学部



CTスキャナとは🤖

CTスキャナとは

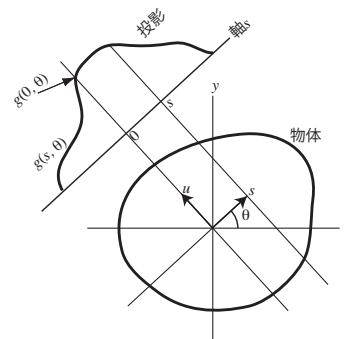
CT(computed tomography) = 計算断層撮影法



(「わんパグ」<http://kids.wanpug.com/illust234.html>)

体の周囲からX線撮影を行い, そのデータから断面像を計算で求める

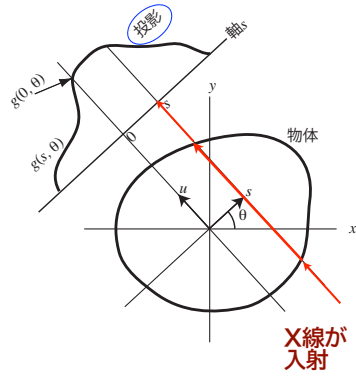
CTを実現するには



ある方向からX線を照射し,
その方向での吸収率(投影)を調べる

すべての方向からの投影がわかれば,
元の物体における吸収率分布がわかる

投影とは

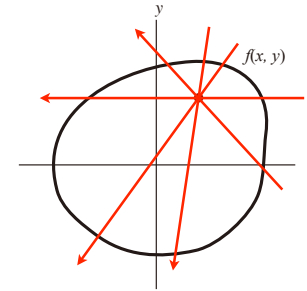


X線がある直線に沿って物体を通過するとき、直線上の各点で吸収される

通過したX線の量は、入射した量に吸収率の積分(線積分)をかけたものになっている

投影=吸収率の線積分
直線上の吸収率の合計であって、どの点で吸収されたかはわからない

Radonの示した定理



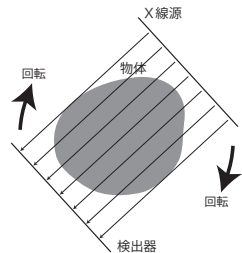
2次元関数の任意の点での値は

その点を通るすべての投影(線積分)がわかれば求められる

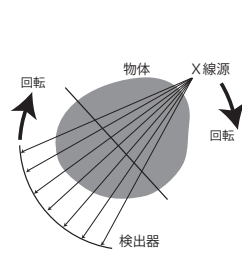
どうやって求めるかは、あとで説明します。

各方向からの投影のしかた

理論上はこんなふうを考える



実際はこのようにX線を当てる

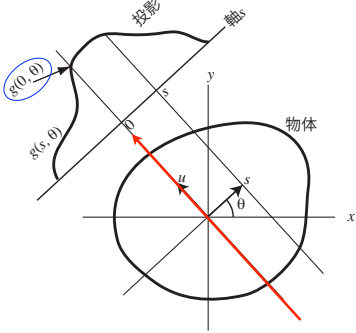


物体の1点について考えれば、投影する順番が異なるだけで、各方向の投影が得られるのは同じ

Radon変換とray-sum 🤖

Radon変換

投影を2次元の積分で表す



この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

つまり $x \cos\theta + y \sin\theta = 0$

この線上だけを積分する

→この式を満たす点だけを積分する

$$g(0, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos\theta + y \sin\theta) dx dy$$

デルタ関数で表せる

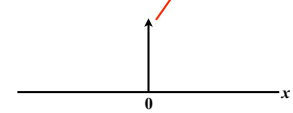
ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x=0$ の1点以外すべてゼロ

$x=0$ をはさんで積分すると1

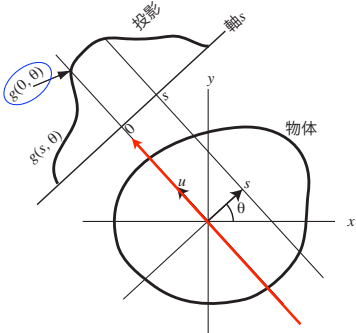
高さは、何だともいえない
(「無限」でもない。なぜなら $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x) dx = k$)



こんなふうに表示ざるを得ない

Radon変換

投影を2次元の積分で表す



この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

つまり $x \cos\theta + y \sin\theta = 0$

この線上だけを積分する

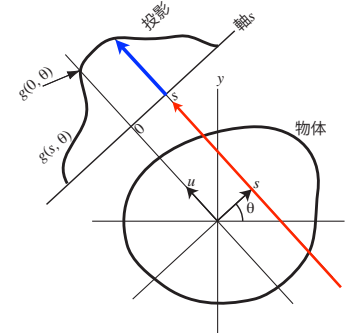
→この式を満たす点だけを積分する

$$g(0, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos\theta + y \sin\theta) dx dy$$

デルタ関数で表せる

Radon変換

$g(s, \theta)$ は?



この線上では

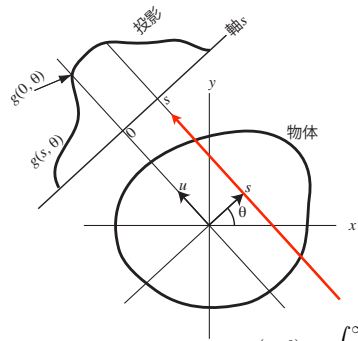
$$x \cos\theta + y \sin\theta - s = 0$$

$$g(s, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos\theta + y \sin\theta - s) dx dy$$

Radon変換

ray-sum

投影を1次元の線積分で表す



(x, y) と (s, u) の関係は θ の回転

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

(x, y) を (s, u) で表す

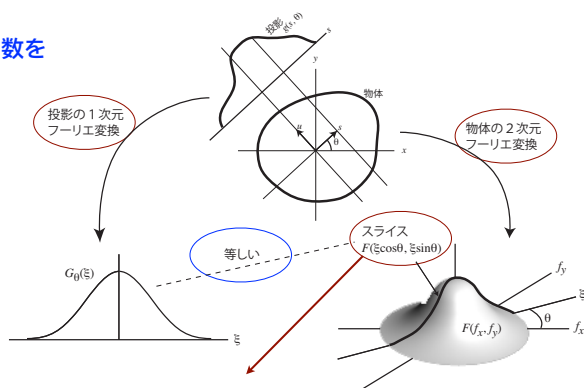
この線上では s が一定で u が変化

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \quad \text{ray-sum}$$

投影切断面定理 🤔

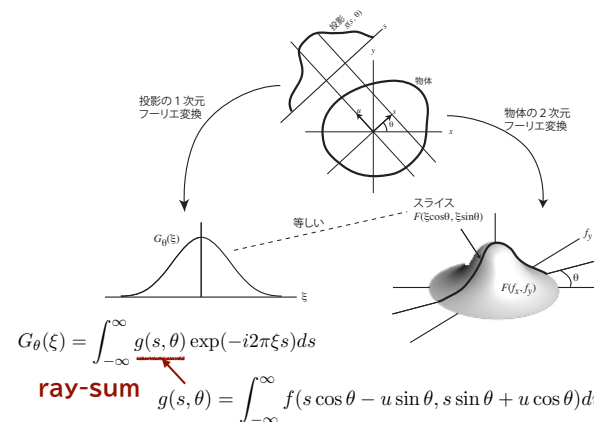
投影切断面定理

投影群から2次元関数を再構成する



「スライス」がすべてそろえば、2次元逆フーリエ変換で2次元関数が再構成できる

投影切断面定理の証明



$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta) \exp(-i2\pi\xi s) ds$$

$$\text{ray-sum } g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du$$

投影切断面定理の証明

$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) \times \exp(-i2\pi\xi s) ds du$$

(x, y) と (s, u) の関係

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

$dxdy = dsdu$
どちらも正方座標の小さな正方形

x, y に書き戻す

$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) dx dy$$

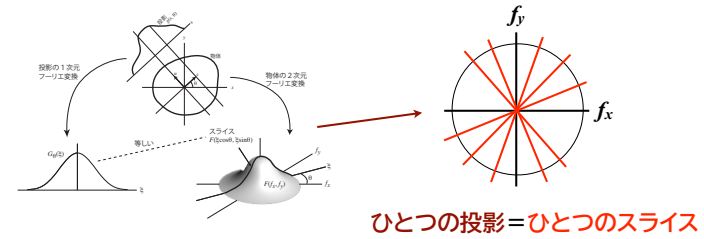
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi((\xi \cos \theta)x + (\xi \sin \theta)y)) dx dy$$

これらを変数と考える

$$= F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \quad \theta \text{ 方向のスライス}$$

フーリエ変換法による再構成の問題点

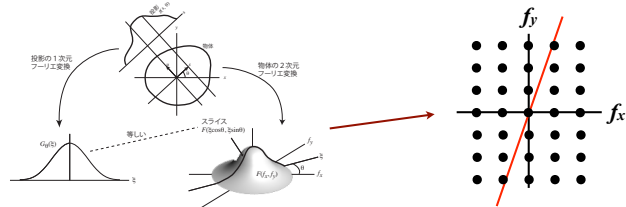
2次元フーリエ変換の「すべてのスライス」を求めることはできない



有限個の投影では、2次元フーリエ変換を埋め尽くすことはできない → 補間を行う

フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行うが、コンピュータで計算する限りは「離散的」



周波数空間での誤差は、画像全体にひろがる
アーティファクトを生む

スライスは極座標
2次元フーリエ変換は正方座標

コンピュータの能力が低かった時代は精密な計算が難しかった
→ さてどうした？