

逆投影法による再構成

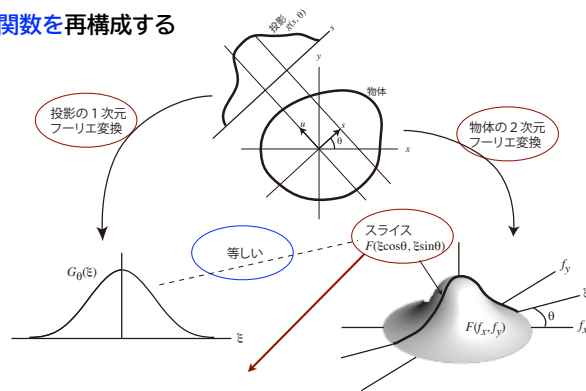
浅野 晃
関西大学総合情報学部



投影切断面定理の復習

投影切断面定理

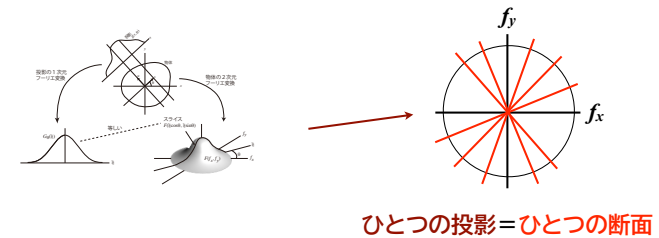
投影群から2次元関数を再構成する



「断面」がすべてそろえば、2次元逆フーリエ変換で2次元関数が再構成できる

フーリエ変換法による再構成の問題点

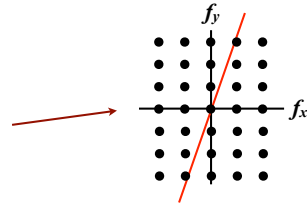
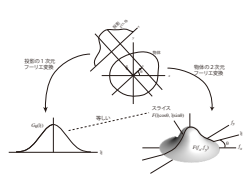
2次元フーリエ変換の「すべての断面」を求めることはできない



有限個の投影では、2次元フーリエ変換を埋め尽くすことはできない → 補間を行う

フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行う。が、コンピュータで計算する限りは「離散的」



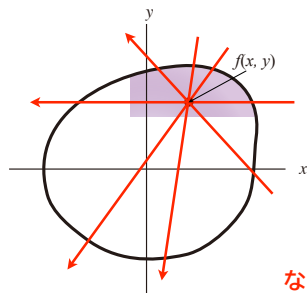
周波数空間の誤差は、画像全体にひろがる
アーティファクトを生む

コンピュータの能力が低かった時代は
精密な計算が難しかった →さてどうした？

断面は極座標
2次元フーリエ変換は正方座標

逆投影法💡

素朴な再構成 — 逆投影



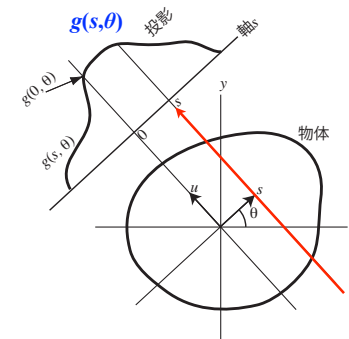
2次元関数の任意の点
 $f(x, y)$ での値は

$f(x, y)$ を通るすべての投影(線積分)が
わかれば求められる

なら、それらの線積分をすべて合計してみれば？

どの線積分にも $f(x, y)$ は含まれているのだから、
合計したら $f(x, y)$ が強調される？

逆投影法



この線上では
 $x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0$

つまり
 $s = x \cos \theta + y \sin \theta$

よって投影は
 $g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$

これを半周分足し合わせたのが逆投影

$$b(x, y) = \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

復元できているのか？ $f(x, y)$ とどれほど違うのだろうか？

復元できているのだろうか？

Radon変換

$$g(s, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

逆投影

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - (x \cos \theta + y \sin \theta)) dx' dy' \right] d\theta$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\int_0^{\pi} \delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) d\theta \right] dx' dy'$$

復元できているのだろうか？

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - (x \cos \theta + y \sin \theta)) dx' dy' \right] d\theta$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\int_0^{\pi} \delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) d\theta \right] dx' dy'$$

$h(\theta)$ が有限個の θ_k でしか0にならないとき

$$\delta[h(\theta)] = \sum_k \frac{1}{|h'(\theta_k)|} \delta[\theta - \theta_k]$$

三角関数を合成

$$(x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{y' - y}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} = \sin^{-1} \frac{x' - x}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}$$

$\theta = \pi - \alpha$ のときだけ0

$$\delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) = \frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \cos(\pi)} \delta(\theta - (\pi - \alpha))$$

復元できているといえなくもないが...

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - (x \cos \theta + y \sin \theta)) dx' dy' \right] d\theta$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\int_0^{\pi} \delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) d\theta \right] dx' dy'$$

積分すると1

$$\delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) = \frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \cos(\pi)} \delta(\theta - (\pi - \alpha))$$

よって

$$b(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \right] dx' dy'$$

$$= f(x, y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \text{ コンヴォリューションになっている}$$

復元するには

$$b(x, y) = f(x, y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

フーリエ変換すると、コンヴォリューション→積

$$FT[b(x, y)] = FT[f(x, y)] \times FT \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

$$\therefore FT[f(x, y)] = FT[b(x, y)] / FT \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

$$FT \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \text{ なので}$$

$$FT[f(x, y)] = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \times FT[b(x, y)]$$

これでいいのでしょうか？

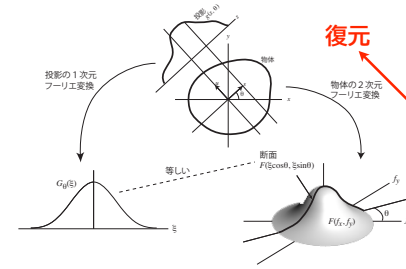
$FT[f(x, y)] = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \times FT[b(x, y)] \quad f_x = f_y = 0$ 周波数0の成分は $FT[f(x, y)] = 0$
 全体の平均が0



そもそも $FT[b(x, y)] = FT[f(x, y)] \times FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]$ $FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$ $f_x = f_y = 0$ で発散している

フィルタ補正逆投影法

再び投影切断面定理



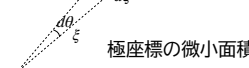
復元
2次元逆フーリエ変換

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$$

フィルタ補正逆投影法

$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$ $\square df_x df_y$ 正方形座標の微小面積

極座標に変換 $f_x = \xi \cos \theta, f_y = \xi \sin \theta$

$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) \xi d\xi d\theta$  極座標の微小面積

投影切断面定理より
 $G_\theta(\xi) = F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$

$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) \xi d\xi d\theta$

フィルタ補正逆投影法

$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) \xi d\xi d\theta$

積分区間を変換

$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) |\xi| d\xi d\theta$

$s = x \cos \theta + y \sin \theta$

$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s \xi) d\xi \right] d\theta$
 $| \xi | G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換

フィルタ補正逆投影法

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi \right] d\theta$$

$|\xi| G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換

$$\hat{g}(s, \theta) \equiv \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi$$

とおくと,

$$f(x, y) = \int_0^\pi \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

投影を、「周波数空間で $|\xi|$ 倍するフィルタ」を適用してから、逆投影

コンヴォリューション逆投影法

$$\hat{g}(s, \theta) \equiv \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi$$

ある角度 θ での投影を

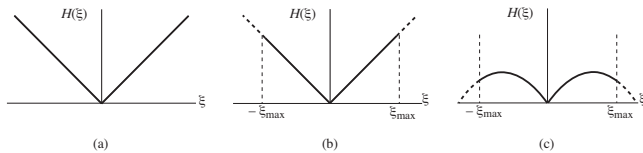
周波数空間で $|\xi|$ 倍 \longrightarrow 実空間では $FT^{-1}[|\xi|]$ とのコンヴォリューション

$$\hat{g}(s, \theta) = g(s, \theta) * FT^{-1}[|\xi|]$$

最初からこれを定義しておけば、フーリエ変換の必要はない

極座標 \rightarrow 直交座標の変換は実空間で行うので、
誤差が画面全体に拡散することはない

フィルタ関数



(a) $|\xi|$

(b) $H(\xi) = |\xi| \text{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right)$

(c) $H(\xi) = |\xi| \text{sinc}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \text{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right)$

高い周波数成分を増幅すると
ノイズを強調してしまうので、抑える

※現代のCTスキャナでは、
初期状態の物体から計算で投影を求める \rightarrow 実際の投影と比較して、物体を修正する
という操作を繰り返すことで、実際の物体に近づけていく、という方法(逐次近似法)も
用いられています