2023年度秋学期 統計学 第9回

確からしさを記述する — 確率

浅野 晃
関西大学総合情報学部

「確率」って，よく聞くけれど

※「確立」という書き間違いを見ると，かなりがっかりします

※中国語では「概率」あるいは「機率」というそうです

「降水確率40%」って？

何の割合が40%？

機会

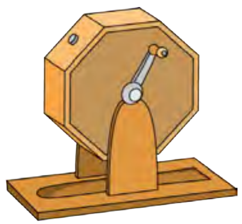
現在と同じ気象状況が
これから何度も何度も起きるとすると
そのうち40%の場合で雨になる

機会のうちの雨の割合が40%

可能性の集合

くじびき

※この機械は「新井式廻轉抽籤器」というそうです(リンク参照)



https://illpop.com/png_season/dec01_a07.htm

↓くじをひくと

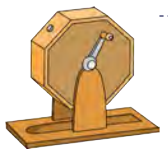
当たった！

現実に起きたのは，
これだけ

他のことは起きていない

可能性の集合

しかし



当たった

他の可能性もあった

はずれ　当たり　はずれ

こうなるかも知れなかった

「偶然」(人知が及ばない)

[ランダム現象]という

可能性の集合

現実 | 可能性

当たった

はずれ　当たり　はずれ

可能性のうち
どの結果になりやすいか？

を，数値で表せないか？
(ギャンブラーの数学)

「確率」の定義💡

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は，
[事象] event

そのできごとがおきる可能性のある，十分多くの機会があるとき，
[試行] trial

それらの機会のうち，そのできごとがおきる機会の数の割合

くじを十分多くの回数ひくとき，10回中3回の割合で当たるなら，確率0.3
十分多くの人がそれぞれ1回くじをひくと，10人中3人の割合で当たる，でも同じ

※確率は「割合」なので，「大きい・小さい」と表現します。「高い・低い」なのは「可能性」です。

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は,

そのできごとがおきる可能性のある
十分多くの機会があるとき,
おかしな点(1)　おかしな点(2)

それらの機会のうち
そのできごとがおきる機会の数の割合

確率の定義・おかしな点(1)

「十分多くの機会」?

数学でいう「十分多く」とは,

だれかが「十分ではない」といったら,
それに応じていくらでも多くすること
ことができる, ということ

現実には無理😵

確率の定義・おかしな点(2)

機会が「ある」とき?

機会が「あった」ではない

つまり, 未来におきるできごとの話をしている。

未来のことはわからない。

確率は測定できないけれど

「十分多くの機会」は現実には無理
未来のことはわからない　人間の思考の限界?🤔

でも

過去を未来に延長できると考える　(「自然の斉一性」)

十分多くは無理でも,
「そこそこ多く」の機会があれば　[大数の法則]
そこそこの精度で確率を推定できる

というわけで確率は

「十分多くの機会」に関する話を，次の1回の機会にあてはめている

ギャンブラーは，
日常的に賭けをしているから，
確率の大きなできごとを見抜いて賭ければ，
全体として勝つことができる

どんな名ギャンブラーでも，1回の賭けに
必ず勝つことはできない

もうひとつの確率の定義🤔

さいころで1が出る確率

なぜ1/6なのか？

$$\frac{\text{「1」は1通り}}{\text{1, 2, 3, 4, 5, 6の6通り}} = 1/6$$

確率の[ラプラスの定義]という

さっきの「頻度による定義」とは違う…🤔

ラプラスの定義の意味

n回 = n/(6n)

$$\frac{\text{「1」は1通り}}{\text{1, 2, 3, 4, 5, 6の6通り}} = 1/6$$

n回 n n n n n

1～6が皆同じ確率で出る，と認めるなら，
「同様に確からしい」 equally likely

さいころを6n回ふる。（nは十分大きい）

nが十分大きければ，1～6は同じ回数出る（頻度による定義）

ラプラスの定義の意味

1～6が皆同じ確率で出る，と認めるなら

「同様に確からしい」

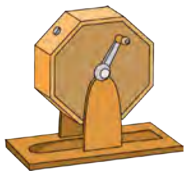
正しいと証明する方法はない

このさいころは偏っていないだろうという
「信頼」によって認めているだけ

条件付き確率と独立🤔

統計学でいう「独立」とは

2つのランダム現象がおきるとき，一方の結果がもう一方に影響しない



2度続けてひくとき，

1度めで出た玉を戻さなければ，独立でない

1度めで当たりが出ると，
2度めは当たりが減っている

正確には[条件付き確率]を使って定義する

条件付き確率

「雨が降る確率」
「雨の予報が出ているときに雨が降る確率」 ← ふつう，こちらの方が大きい

条件付き確率とは，

何かがおきたときに
何かがおきるとわかったときに
何かがおきるのが確実なときに

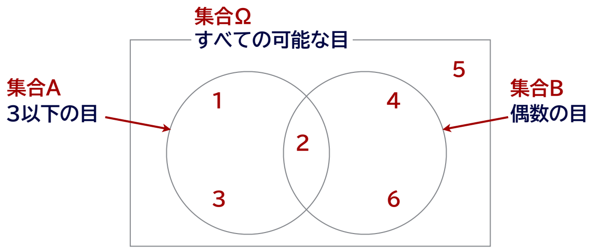
別のことがおきる確率

「何か」がおきることの影響を受けることがある
（「何か」と「別のこと」に因果関係がなくても）

さいころの例で

集合を表す「ベン図」を使って考える

さいころの「可能な目」は，1,2,3,4,5,6

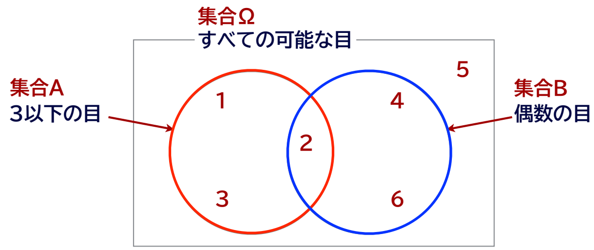


集合と確率

集合Xの要素の数を|X|で表す

「3以下の目が出る確率」
|A|/|Ω| = 3/6 P(A)で表す

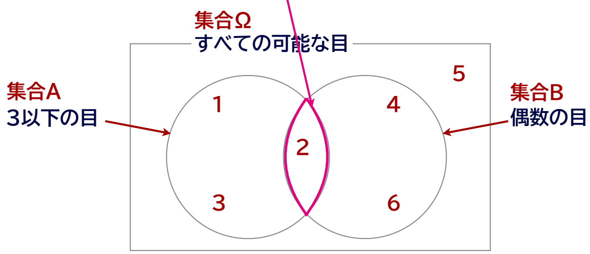
「偶数の目が出る確率」
|B|/|Ω| = 3/6 P(B)で表す



集合と確率

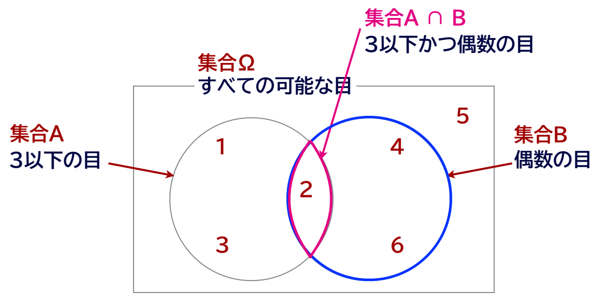
「3以下で，かつ偶数の目が出る確率」
|A ∩ B |/|Ω| = 1/6
P(A ∩ B)で表す

3以下でかつ偶数の目の集合
A ∩ B で表す



この式は何を表す？

|A ∩ B | / |B| 分母がΩではなくB
「可能なすべての目」は，ΩではなくBになった



条件つき確率

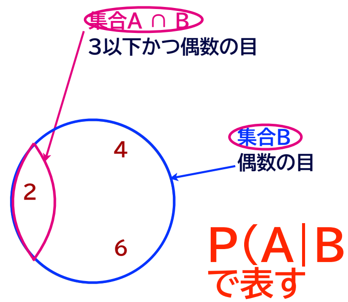
|A ∩ B| / |B|　分母がΩではなくB

「可能なすべての目」は，ΩではなくBになった

偶数の目が出るとわかっているときに

「3以下~~かつ偶数~~」の目が出る確率　わかってます

偶数が出ることを条件とする，
3以下が出る[条件つき確率]



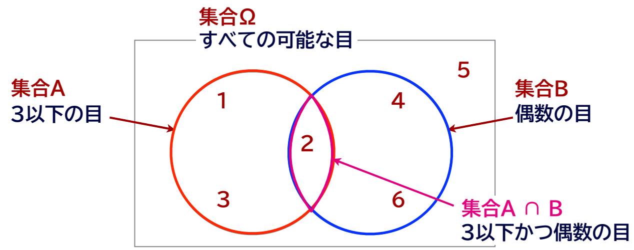
P(A|B) で表す

条件つき確率

「3以下の目が出る確率」　P(A) = |A| / |Ω| = 3/6 = 1/2

偶数が出ることを条件とする，
3以下が出る条件つき確率　P(A|B) = |A ∩ B| / |B| = 1/3

「偶数が出る」という情報によって，
3以下が出る確率が変化した

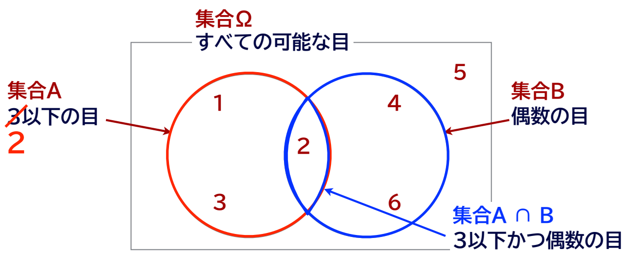


「2以下の目」だったら

「2以下の目が出る確率」　P(A) = |A| / |Ω| = 2/6 = 1/3

偶数が出ることを条件とする，
2以下が出る条件つき確率　P(A|B) = |A ∩ B| / |B| = 1/3

つまり　P(A) = P(A|B)



「独立」

「2以下の目が出る確率」　P(A) = |A| / |Ω| = 2/6 = 1/3

偶数が出ることを条件とする，
2以下が出る条件つき確率　P(A|B) = |A ∩ B| / |B| = 1/3

つまり P(A) = P(A|B)　2以下が出る確率は，「偶数が出る」という情報によっても，変化しない

P(A) = P(A|B)のとき「事象Aと事象Bは独立」という

AとBが独立＝「Bが起きる」ことがわかっても，Aが起きる確率には影響がない

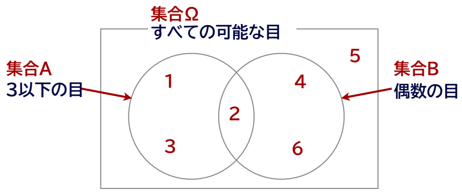
確率の積の法則

Bを条件とする, Aの条件つき確率

$$P(A|B) = |A \cap B| \,/\, |B|$$
$$= (|A \cap B| \,/\, |\Omega|) \,/\, (|B| \,/\, |\Omega|)$$
$$= P(A \cap B) \,/\, P(B)$$

つまり

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$



確率の積の法則

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

AとBの両方が起きる確率

とりあえずBが起きるものとして, そのときにAが起きる確率

ところで, Bが本当に起きる確率

AとBが独立のときは, $P(A|B) = P(A)$ だから

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

AとBが独立のときだけ, こうなることに注意 ※勝手に独立にしてはいけません。

モンティ・ホール問題

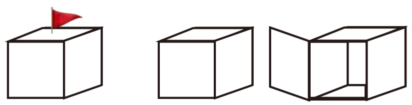
モンティ・ホール問題

モンティ・ホール氏が司会するテレビ番組

箱が3つあり、ひとつだけに賞品がある。

ゲストが箱をひとつ選ぶが, まだ開けない

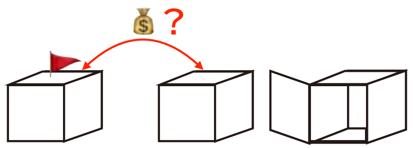
モンティは賞品のありかを知っている。
彼は「ゲストが選ばなかった空箱」を1つ開けて



モンティ・ホール問題

「いまなら，さっき選んだ箱ではなく，
まだ開けていないもう1つの箱を選んでもかまいません」

選ぶ箱を変えるほうが，当たる確率が大きくなるか？



答えは

ゲストが選ぶ箱を変えないと，当たる確率1/3

箱を変えると，当たる確率2/3

箱は残り2つだから，当たる確率は，
箱を変えても変えなくても1/2じゃないの？

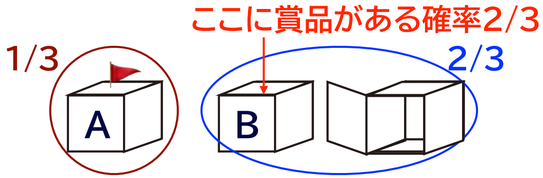
※違います。「勝手に同確率」にしてはいけません。

もっとも簡単な説明

箱をA,B,Cとし，ゲストがAを選んだとする

賞品が　Aにある確率　1/3
「BまたはC」にある確率　2/3

モンティが開けるのは必ず空の箱 → 上の確率は，
箱を開けても変わらない



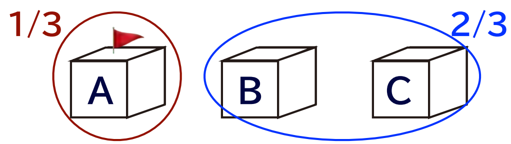
本当に正しいか？

賞品が　Aにある確率　1/3
「BまたはC」にある確率　2/3

この確率は，
箱を開けても変わらない

本当か？

「モンティは，賞品がある箱は開けない」



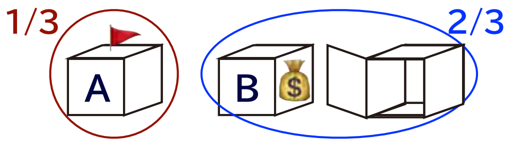
本当に正しいか？

「モンティは，賞品のある箱は開けない」

賞品がBにあるなら，Cしか開けられない
賞品がCにあるなら，Bしか開けられない

他に可能性はない

「BまたはCにある確率2/3」は，　箱を開けても変わらない



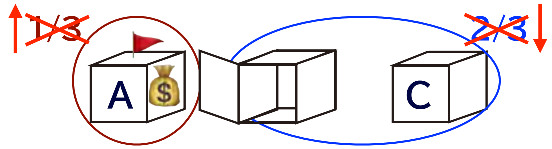
もし「裏ルール」があったら

「モンティは，賞品のある箱は開けない」

賞品がAにあるときは？　モンティはB,Cのどちらを開けてもよい

もしも「賞品がAにあるときは，必ずBを開ける」という
裏ルールがあったら？

モンティがBを開けたら，賞品はAにあるという確信が高まる



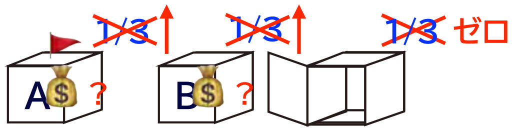
実はモンティが…

「モンティは，賞品のある箱は開けない」

モンティが，↑これを守っていなかったら？

モンティは，実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んでおり，
今回たまたまCを開けたら空だった，としたら

賞品がA,Bにある確率が平等に大きくなる



条件付き確率を考える

モンティは，実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んでおり，
今回たまたまCを開けたら空だった，としたら

当初，Aに賞品がある確率を$P(A)$，Cに賞品がない確率を$P(\bar{C})$ とすると

モンティがCを開けたあとにAに賞品がある確率は
「モンティがCを開けて空だったという条件のもとで，
Aに賞品がある条件付き確率」$P(A \mid \bar{C})$

$$P(A \mid \bar{C}) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$$

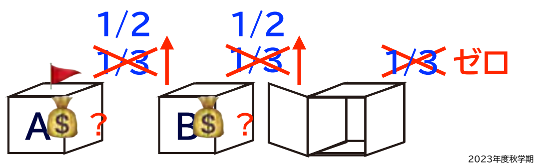
実はモンティが…

「モンティは，実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んだ」のならば

Aに賞品がある確率 $P(A) = \dfrac{1}{3}$, Cに賞品がない確率 $P(\bar{C}) = \dfrac{2}{3}$ なので

モンティがCを開けたあとにAに賞品がある確率は

$$P(A \mid \bar{C}) = \frac{\overset{\text{賞品がAにあってCにない}}{P(A \cap \bar{C})}}{P(\bar{C})} = \frac{P(A)}{P(\bar{C})} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$



この問題のポイントは

モンティの行動は，賞品のありかを知る手がかりになっているか？

確率とは「すべての可能性の数のうち，着目している可能性の割合」
つまり，モンティの行動が「他にどんな可能性があったか」によって
確率は変わる

それには，モンティの「心の中」が影響します。