

2023年度秋学期 統計学 第13回
不確かな測定の不確かさを測る
— 不偏分散とt分布

浅野 晃
関西大学総合情報学部



ちょっと(ほんのちょっと)
前回までの復習

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

標本 X_1, X_2, \dots, X_n をとりだす
サイズ n

標本平均 \bar{X}

母平均 μ

正規分布
と仮定する

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

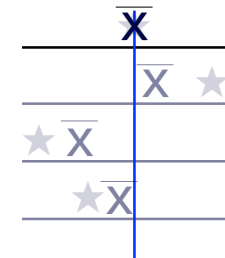
母分散 σ^2 がわかっているものとする (説明の都合です)

区間推定の考え方

数値をいくつか抽出して標本平均

仮に, 何度も抽出したとすると

標本平均の期待値
= 母平均



標本平均にすることで
ばらつきが小さくなる

標本平均の分散
= 母分散 ÷ 標本サイズ

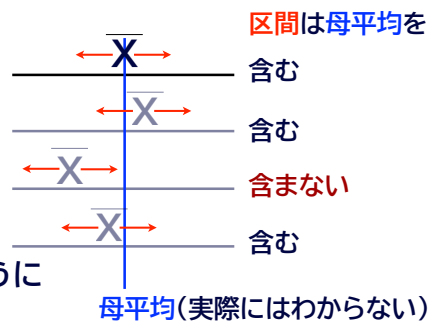
母平均(実際にはわからない)
のまわりにばらついている

区間推定の考え方

標本平均の左右に区間をつける

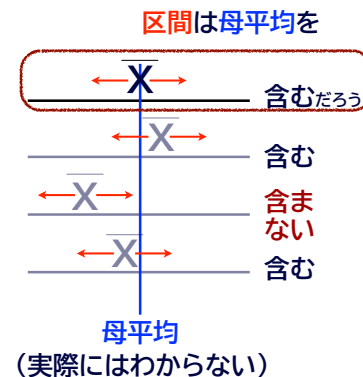
標本平均はばらついているが、前後に区間をつければ、母平均はたいていその区間に入っているようにできる

どの回の区間が
母平均を含むか・含まないかは
わからないが



確率95%で母平均を含むように
区間の幅を設定できる

信頼区間



95%という大きな確率で
母平均を含むように設定した区間だから、
その1回でも含むと信じる

母平均の
[信頼係数]95%の
[信頼区間] という
([95%信頼区間])

不偏分散💡

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

標本 X_1, X_2, \dots, X_n をとりだす
サイズ n

標本平均 \bar{X}

母平均 μ

正規分布
と仮定する

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわかっているものとする (説明の都合です)

母分散は、ふつうはわからない

母集団全体は調べていないし、母平均もわからない
(わからないから、いま推定しようとしている)

それなのに、母分散がわかるはずがない

母分散の「代用品」を、標本を使って計算できないか。

標本を使って分散を計算

分散 = (偏差)²の平均
(データの各数値) - (データの平均)

標本を使って分散を計算する。

データ: 標本 X_1, \dots, X_n

データの平均: 本当は母平均だが、
わからないので標本平均 \bar{X} で代用

標本を使って分散を計算

標本を使った分散

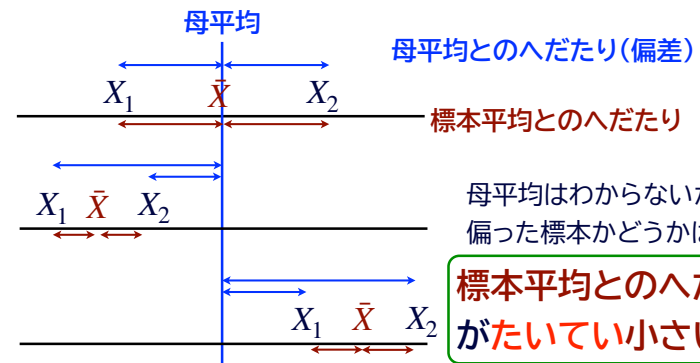
$$S^2 = \frac{1}{n} \{ (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \}$$

← 標本サイズで割る

分散 = (偏差)²の平均
だから当然だけど… 本当にこれでいいの？

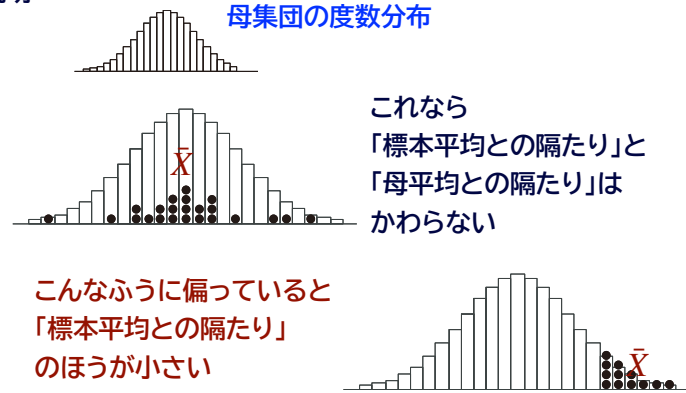
標本平均を用いた偏差

標本サイズ $n = 2$ とする 標本は X_1, X_2



標本平均を用いた偏差

別の説明



これなら
「標本平均との隔たり」と
「母平均との隔たり」は
かわらない

こんなふうに偏っていると
「標本平均との隔たり」
のほうが小さい

不偏分散

母平均との隔たりよりも
標本平均との隔たりのほうが
たいてい小さい

標本平均との隔たりを使って分散を計算すると、
母分散よりもたいてい小さめになる

では、計算のときに少し大きめにしておけば？

不偏分散

計算のときに少し大きめにする

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \{ (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \}$$

(標本サイズ - 1)で割る

これを不偏分散(不偏標本分散)といい、
母分散の代用に用いる

「不偏」とは？

「不偏」とは？

標本平均との隔たりを使って分散を計算すると、
母分散よりもたいてい小さめになる

計算のときに少し大きめにする？

母分散と一致するわけではないが
母分散より大きくも小さくも平等にはずれる

「不偏」とは「えこひいきしない」こと

標本サイズ=2のときに, 式で書いてみると

標本サイズ=2のとき, 標本を X_1, X_2 , 標本平均を \bar{X} とすると
不偏分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{2-1} \{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2\}$$

{ }内は, 2つの「へだたり」の2乗の和? $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{2-1} \left\{ \left(X_1 - \frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 + \left(X_2 - \frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2-1} \left\{ \left(\frac{X_1 - X_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{X_2 - X_1}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2-1} \left\{ \frac{(X_1 - X_2)^2}{2} \right\} \end{aligned}$$

「へだたり」は, ひとつしかない
だから, 2で割らずに1で割る

不偏分散を用いた区間推定💡

正規分布の場合の区間推定

前回の例題

ある試験の点数の分布は正規分布であるとします。

この試験の受験者から, 10人からなる標本を無作為抽出して,
この人たちの点数を平均したところ50点でした。

この試験の受験者全体の標準偏差が5点であるとわかっている
とき, 受験者全体の平均点の95%信頼区間を求めてください。

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

標本 X_1, X_2, \dots, X_n をとりだす
サイズ n

標本平均 \bar{X}

母平均 μ

正規分布
と仮定する

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわかっているものとする (説明の都合です)

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は、母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

標本平均は、やはり正規分布にしたがうが、
分散が $1/n$ になる [性質2]
正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は、母集団分布と同じ確率分布にしたがう

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

標本平均は、やはり正規分布にしたがうが、分散が $1/n$ になる
[性質2] 正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$

正規分布の[性質1]により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \text{ は標準正規分布にしたがう } N(0,1)$$

本当は、母分散はわからない

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \text{ は標準正規分布にしたがう } N(0,1)$$

本当は母分散はわからない

不偏分散で代用する

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \text{ 不偏分散 } t \text{ は何分布にしたがう?}$$

t分布

$$t \text{ 統計量 } t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \text{ は}$$

自由度 $(n-1)$ の t分布にしたがう
 $t(n-1)$

(「スチューデントのt分布」という)

発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

正規分布(母分散不明)の場合の区間推定

テキストの例題

ある試験の点数の分布は正規分布であるとしてます。

この試験の受験者から、10人からなる標本を無作為抽出して、この人たちの点数を平均したところ50点でした。

この10人の不偏分散が5²点であるとき、受験者全体の平均点の95%信頼区間を求めてください。

今回は
「受験者全体の標準偏差が5点であるとわかっている」

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

標本 X_1, X_2, \dots, X_n をとりだす
サイズ n

標本平均 \bar{X}

母平均 μ

正規分布
と仮定する

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

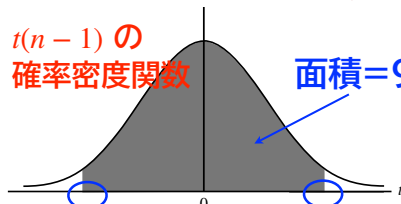
母分散 σ^2 がわからないので、不偏分散 s^2 で代用

t分布を用いた区間推定

$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度 $(n-1)$ の t分布にしたがう
 $t(n-1)$

$t(n-1)$ の
確率密度関数

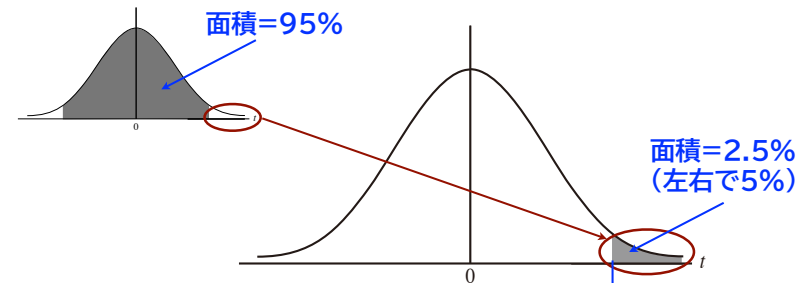
面積=95%



$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%とすると

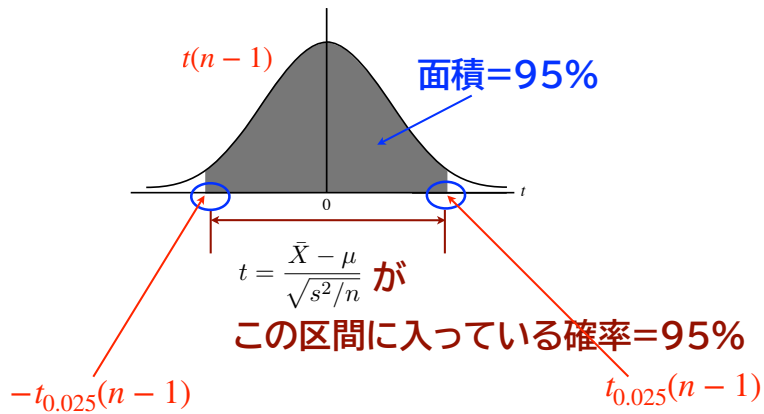
t分布を用いた区間推定



境界の値は自由度によってちがうので

$t_{0.025}(n-1)$ としておく [上側2.5%点]

t分布を用いた区間推定



t分布を用いた区間推定

$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$ の間に入っている確率が95%

式で書くと $P\left(-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$

μ の式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

t分布を用いた区間推定

例題では

標本平均=50 不偏分散=25 標本サイズ=10

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

μ の95%

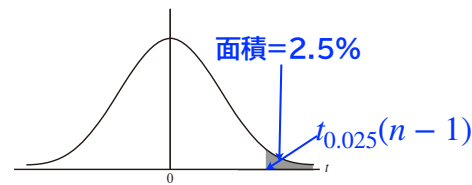
信頼区間の下限

μ の95%

信頼区間の上限

上側2.5%点 $t_{0.025}(n-1)$ は?

t分布表



パーセントの値 0.025

	0.40	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.3249	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.2887	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.2767	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.2707	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.2672	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.2648	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.2632	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.2619	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.2610	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498

例題では $n-1=9$

$t_{0.025}(9) = 2.262$

t分布を用いた区間推定

例題では

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1) \sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

標本平均=50 不偏分散=25 標本サイズ=10

$t_{0.025}(10-1) = 2.262$

μ の95% μ の95%

信頼区間の下限 信頼区間の上限

計算すると、例題の答は

「46.4以上53.6以下」([46.4, 53.6])

前回の例題と比較

どちらも 標本平均=50 標本サイズ=10

母平均の95%信頼区間は

母分散=25 のとき [46.9, 53.1]

不偏分散=25 のとき [46.4, 53.6]

不偏分散は、母分散の推定量なので、不確か

→信頼区間が広い