

2024年度秋学期

画像情報処理

第1部・画像のサンプリングと周波数 /

第2回

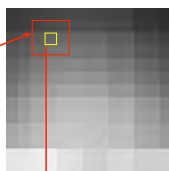
結像と空間周波数, フーリエ級数



関西大学総合情報学部
浅野 晃

第1部のトピック

標本化と量子化



60 60 60
65 65 65
70 70 70

画像は, 離散的な点(画素,
pixel)の集まりでできている
[標本化]

各画素は, 明るさ(輝度)を表す
整数である
[量子化]

空間周波数とフーリエ変換

標本化(サンプリング)・・・どのくらいの細かさで?
[空間周波数]

空間周波数を求めるのが
[フーリエ変換]

光による画像の生成

波の性質・回折と干渉

中国・銭塘江の「大海嘯」

こちらで見てみましょう

https://www2.nhk.or.jp/archives/tv60bin/detail/index.cgi?das_id=D0009010616_00000

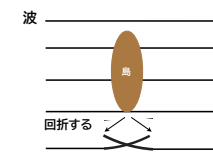
(ウェブサイトの「参考リンク」で、NHKアーカイブスのプレビューをご覧ください。最後のほうに、右の図のような交差する波が映ります)

波の「干渉」

山どうし・谷どうしが
重なり合うと強めあう

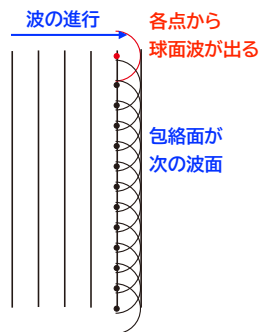
波の「回折」

島の裏側に
回り込む

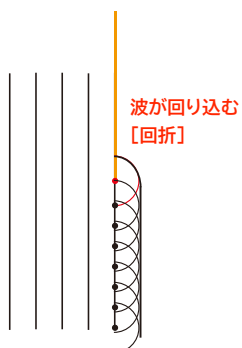


ホイヘンスの原理と波の回折

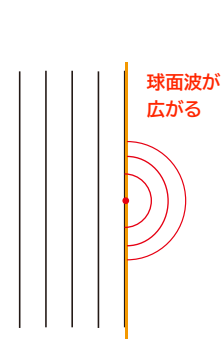
ホイヘンス(Huygens)の原理



障害物があると

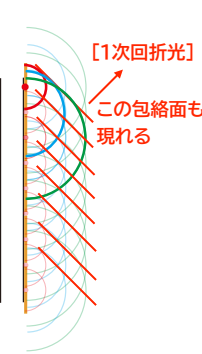
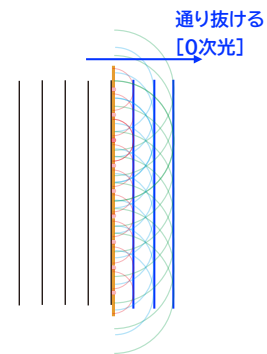


孔を通り抜けると



回折格子と1次回折光

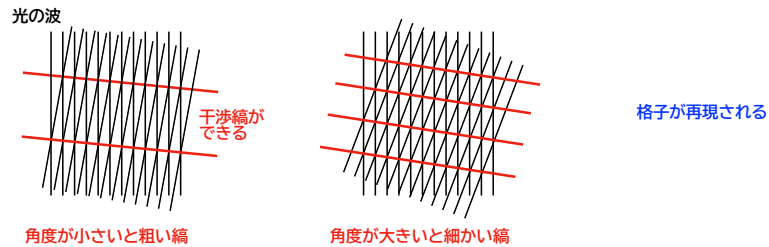
[回折格子] = 孔が周期的に開いている



孔の間隔が広い
→ 1次回折光の角度が緩い

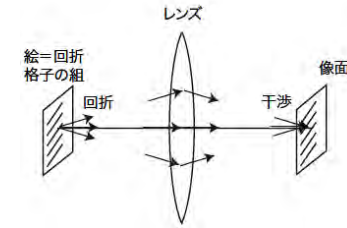
光の干渉

回折光と0次光が重なると再び縞ができる
細かい格子ほど大きな角度で回折光が出るから、



画像の生成(結像)

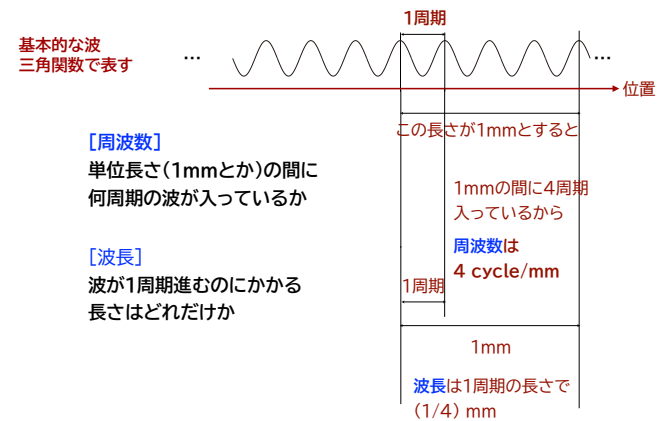
画像は回折格子の重ね合わせであり、
それぞれの回折格子で回折された光が像面で干渉して、画像が再現される



画像は回折格子, すなわち波の重ね合わせである
どんな波が重ね合わされているかを求める計算が[フーリエ変換]

空間周波数とフーリエ級数

波の周波数と波長

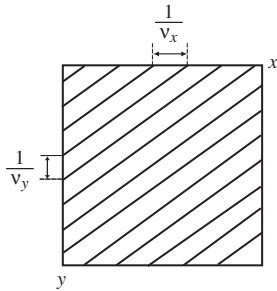


[周波数]
単位長さ(1mmとか)の間に
何周期の波が入っているか

[波長]
波が1周期進むのにかかる
長さはどれだけか

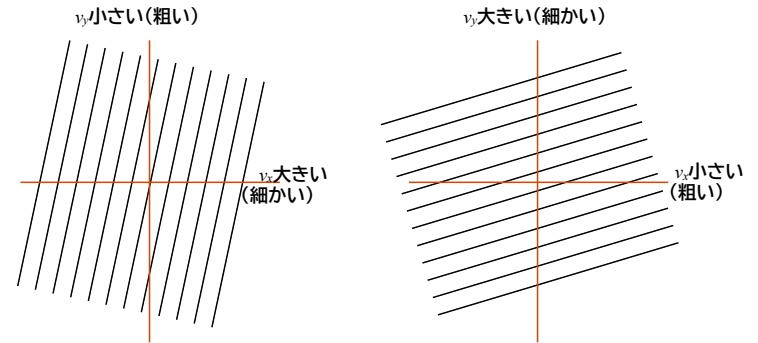
空間周波数

空間周波数 =
 平面上の「明暗の波」の細かさを表す
 単位長さの中で明暗が何回繰り返すか



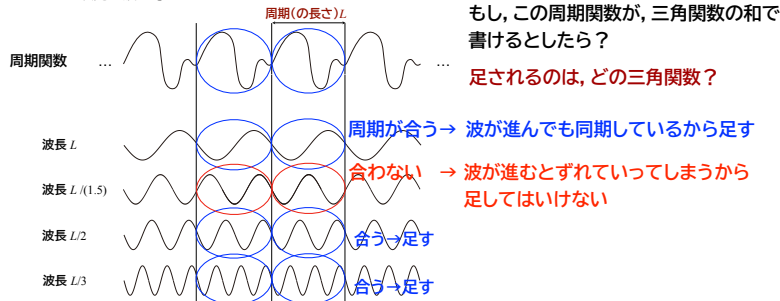
x方向・y方向の2つの空間周波数の組で、
 ひとつの平面上の波が定まる

空間周波数



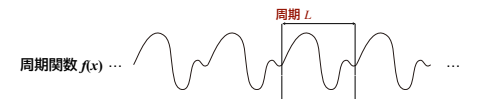
周期関数を分解

ここからは1次元の波で考える



… 足されるのは波長 L/n (n は整数)のものに限る。
 無限個の波の足し合わせだが、**足し算(級数)**で書ける。

「無限個だが、足し算で書ける」



周期関数 $f(x)$ が、三角関数の和で書けるとしたら、足されるのは

$$f(x) = \text{波長 } L + \text{波長 } L/2 + \text{波長 } L/3 + \dots + \text{波長 } L/n + \dots$$

… 足されるのは波長 L/n (n は整数)のものに限るから、
 無限個の三角関数を足すのだけれども
 このように「項」を並べることができる

「級数」という

波の進み方を「角度」で表す

★三角関数を使うときは、角度を単位にしなければいけない

L/n 波長

n/L 単位長さあたり

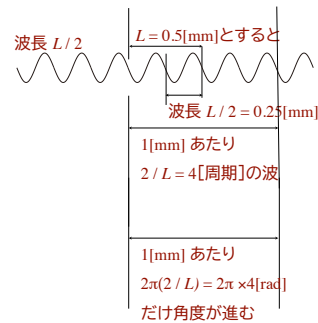
何周期ぶんの波が入っているか
[周波数]

$2\pi(n/L)$ 単位長さあたり

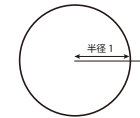
位相(角度)が何ラジアン進むか
[角周波数]

1周=360度=2πラジアン

ラジアン?

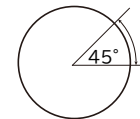


ラジアン(弧度法)



半径1の円の
円周の長さは 2π

1周=360度=2πラジアン



この角度を、
対応する円周の長さで表す

$45^\circ = 1$ 周の1/8 だから、
ラジアンであらわすと

$2\pi \times (1/8) = \pi / 4$ (rad)

周期関数 = 三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{L} x\right) + a_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{L} x\right) + \dots + a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{L} x\right) + \dots$$

波長 L 波長 $L/2$ 波長 L/n

なのですが...

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \}$$

指数関数なら計算が簡単

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{かけ算 = 指数の足し算}$$

三角関数と指数関数の関係

$i^2 = -1$ 虚数単位

オイラーの式 $\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$

$$\cos \omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}, \quad \sin \omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

$$\exp(x) = e^x \quad (e^x)' = e^x \quad \text{微分しても変わらない}$$

$e = 2.71828\dots$

ひとつの三角関数 = 波は、
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが、
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる

つづきは

波長 L/n の波は $\exp(i2\pi\frac{n}{L}x)$ と $\exp(-i2\pi\frac{n}{L}x)$ の組

周期 L の周期関数 $f(x)$ は, 波長 L/n の波を足し合わせて

プラスもマイナスも ∞ (プラスとマイナスの組で1つの波だから)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

という級数で書けるはず。

これがフーリエ級数なんですが,
この係数はどうやって求めるの?
続きは次回。