2024 年度秋学期　画像情報処理　第３回

第１部・画像のサンプリングと周波数／ フーリエ級数とフーリエ変換

フーリエ級数

波の重ね合わせと級数

前回，波を指数関数で表すことを説明しました。これは，三角関数と指数関数の間にある

$$\cos\theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} \tag{1}$$

という関係を用います。ここで，$i\theta$ と $-i\theta$ のような関係の複素数の組を**複素共役**といいます。

このことから，「ひとつのコサイン関数で表される波は，指数関数を用いるときは，正負の２つの周波数の組で表現される」という関係が得られます。これを用いると，「関数 $f(x)$ を波の重ね合わせで表す」ことは，$f(x)$ を次のような級数で表すことにあたります。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right) \tag{2}$$

これを「$f(x)$ を次のような級数で表すことができる」というためには，それぞれの波，すなわち $\exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$ にかかっている，係数 a_n を求める方法が必要です。係数の求めるには，**直交関数系**という考え方を利用します。

内積と直交関数系

さて，上の指数関数には，「同じ基本周期の波をかけあわせて，周期 L にわたって積分したときは 0 にならず，異なる基本周期の波をかけあわせて積分すると 0 になる」という性質があります。なぜならば，この積分は，m, n を整数として

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi\frac{m}{L}x\right)\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi\frac{m-n}{L}x\right)dx \tag{3}$$

と表され[1]，$m \neq n$ のときは，この積分は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i2\pi\frac{m-n}{L}}\left[\exp\left(i2\pi\frac{m-n}{L}x\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{1}{i2\pi\frac{m-n}{L}}\left\{\exp\left(i2\pi\frac{m-n}{L}\frac{L}{2}\right) - \exp\left(-i2\pi\frac{m-n}{L}\frac{L}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{L}{m-n}\sin\pi(m-n)L = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

であり，$m = n$ のときは

[1] $\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)$ のほうの i の前に $-$ がついているのは，複素共役をとっているためです。

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp(0) dx = [x]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = L \tag{5}$$

となるからです。この積分を２つの波の**内積**とよびます。また，このような性質をもつ関数のグループを**直交関数系**とよびます。直交関数系については，第２部で画像情報圧縮について説明するときに，再び取り扱います。

級数の各項の係数は？

さて，関数 $f(x)$ と上の指数関数を使って，次の計算をしてみましょう。k は整数とします。

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx \tag{6}$$

$f(x)$ は (9) 式の級数で表されますから，上の積分は

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx \tag{7}$$

となりますが，上で示した直交性から，級数のうち周期が k/L の項以外は積分すれば 0 であり，その結果，(6) 式の積分は

$$\frac{1}{L} \cdot L a_k = a_k \tag{8}$$

となります。このことは，関数 $f(x)$ を (9) 式の級数による波の足し合わせで表したとき，それぞれの波の係数は (6) 式で求められることを表しています。(9) 式の級数を，関数 $f(x)$ の**フーリエ級数展開**とよび，(6) 式で求められる係数を，周期 L/k の波の**フーリエ係数**とよびます。

フーリエ変換

周期関数でない場合は，波の足し合わせで書けるのか

前回は，周期関数を三角関数（虚数指数の指数関数）の級数，すなわち「波の足し合わせ」で表したフーリエ級数について説明しました。では，元の関数が，周期関数でない一般の関数のときは，どうなるでしょうか。

この場合は，「周期が無限大である」と考えます。すなわち，前回の例では，周期関数 $f(x)$ の周期を L としましたが，今回は $L \to \infty$ となったときの極限を考えます。

(2) 式で示したフーリエ級数の式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \tag{9}$$

は，関数 $f(x)$ が基本周期が $L, L/2, L/3, \ldots, L/n, \ldots$ の波の足し合わせであることを示しています。こ

こで L が大きくなると，n/L と $(n+1)/L$ の差 $1/L$ は小さくなります。このことは，$f(x)$ をフーリエ級数で表したとき，隣り合う波の周波数の差は小さくなってゆくことを示しています。

隣り合う波の周波数の差→ 0 のとき，「足し算」は「積分」へ

そこで, この周波数の差 $1/L$ を $\Delta\nu$ で表すことにします。このとき, 上のフーリエ級数の式と, (eqn:fourierseries01) 式で示したフーリエ係数の式

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)dx \tag{10}$$

をあわせると，上の $\Delta\nu$ を使って

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right) \tag{11}$$

となります。$n\Delta\nu$ は，（周波数の差）×（項の個数）ですからある周波数をさします。これを，周波数 ν で表します。また，$L\to\infty$ のとき $\Delta\nu\to 0$ ですから，$\Delta\nu$ を含む総和は，$d\nu$ を含む積分になります。よって，

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu \tag{12}$$

が得られます。

フーリエ変換

これを，

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx \tag{13}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp\left(i2\pi x\nu\right)d\nu \tag{14}$$

のように分けて表すとき，式 (13) を**フーリエ変換** (Fourier transformation)，式 (14) を**逆フーリエ変換** (inverse Fourier transformation) とよびます。関数 $F(\nu)$ は，もとの関数 $f(x)$ に，どのような周波数の波がどの程度含まれているかを表しています。上で述べたように，フーリエ級数において $L\to\infty$ としたので，級数で隣接する波の間隔が 0 に近づいていきます。したがって，フーリエ係数の並び $\{a_k\}$ は，ついに連続関数 $F(\nu)$ に達するわけです。$f(x)$ が存在する空間を**実空間**，$F(\nu)$ が存在する空間を**周波数空間**とよびます。また，$f(x)$ と $F(\nu)$ を**フーリエ変換対**とよびます。

実空間と周波数空間は，同じ関数を表すのに，表し方（基底）を変えたものということができます。これについては，第 2 部で直交変換を扱うときに，ふたたび説明します。

2 次元の波の場合

ここまでは 1 次元の関数の話をしてきましたが，画像のような 2 次元の関数のフーリエ変換は，

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dxdy \tag{15}$$

となります。この場合の，２次元の周波数 (ν_x, ν_y) が，前回説明した空間周波数です。

この式は，指数関数については「指数の足し算＝指数関数のかけ算」という関係，すなわち

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b) \tag{16}$$

という関係を使うと，

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy \tag{17}$$

となり，2 次元フーリエ変換は「x, y それぞれに 1 次元のフーリエ変換をする」のと同じであることを示しています。この性質を「**分離可能** (separable) である」といいます。この性質は，第 2 部で「画像の直交変換」を行列を使って表すときに，ふたたび出てきます。

参考文献

H. P. Hsu（佐藤平八訳），フーリエ解析，森北出版， 978-4627930100

なお，参考書では周波数 ν のかわりに角周波数 $\omega = 2\pi\nu$ を使って説明されていることも多く，その場合係数等が違っていることに注意してください。また，フーリエ変換と逆フーリエ変換につく係数も表現のしかたによって違っています。