2024年度秋学期

# 画像情報処理

第1部・画像のサンプリングと周波数 ／

第3回

フーリエ級数とフーリエ変換

関西大学総合情報学部
浅野 晃

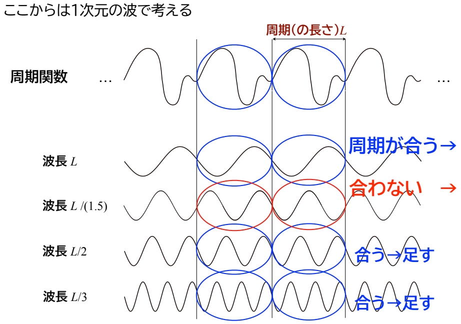
---

## フーリエ級数

---

## 周期関数を分解

ここからは1次元の波で考える




周期が合う→ 波が進んでも同期しているから足す

合わない → 波が進むとずれていってしまうから足してはいけない

合う→足す

合う→足す

もし，この周期関数が，三角関数の和で書けるとしたら？

足されるのは，どの三角関数？

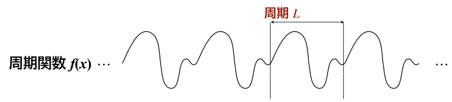
… 足されるのは波長 $L / n$（$n$は整数）のものに限る。

無限個の波の足し合わせだが，足し算（級数）で書ける。

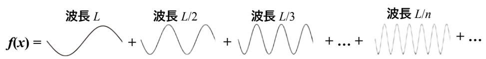


---

## 「無限個だが，足し算で書ける」




周期関数 $f(x)$が，三角関数の和で書けるとしたら，足されるのは




… 足されるのは波長 $L / n$（$n$は整数）のものに限るから，

無限個の三角関数を足すのだけれども

このように「項」を並べることはできる

「級数」という

# 周期関数＝三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + a_1\cos(2\pi\frac{1}{L}x) + a_2\cos(2\pi\frac{2}{L}x) + \ldots + a_n\cos(2\pi\frac{n}{L}x) + \ldots$$

波長 $L$　　波長 $L/2$　　波長 $L/n$

なのですが…

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

指数関数なら計算が簡単

$$a^x a^y = a^{x+y}$$ かけ算＝指数の足し算



# 三角関数と指数関数の関係

$i^2 = -1$ 虚数単位

オイラーの式 $\exp(i\omega) = \cos\omega + i\sin\omega$　　$\exp(x) = e^x$　　$(e^x)' = e^x$

微分しても変わらない

$e = 2.71828...$

$$\exp(i\omega) = \cos\omega + i\sin\omega$$

$$\exp(-i\omega) = \cos(-\omega) + i\sin(-\omega) = \cos\omega - i\sin\omega$$

足し算すると

$$\exp(i\omega) + \exp(-i\omega) = 2\cos\omega$$

$$\cos\omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}$$

引き算すると

$$\exp(i\omega) - \exp(-i\omega) = 2i\sin\omega$$

$$\sin\omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$



# 三角関数と指数関数の関係

オイラーの式 $\exp(i\omega) = \cos\omega + i\sin\omega$

$$\cos\omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2} \qquad \sin\omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

ひとつの三角関数＝波は,
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが,
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる



# 周期関数を指数関数の和で

波長 $L/n$ の波は $\exp(i2\pi\frac{n}{L}x)$ と $\exp(-i2\pi\frac{n}{L}x)$ の組

周期 $L$ の周期関数 $f(x)$ は, 波長 $L/n$ の波を足し合わせて

プラスもマイナスも∞

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

と書ける　はず。

# 書ける, のはいいが

周期 $L$ の周期関数 $f(x)$ は, 波長 $L/n$ の波を足し合わせて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

と書ける　はず。

この係数はどうやって求めるの？



# ある波長の波を切り出す

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

から, 波長 $L/n$ の波に
対応する指数関数だけを切り出したい

波長 $L/n$ の指数関数　$\exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$

一方, $f(x)$ を構成する指数関数のいずれか（波長 $L/m$）は

$$\exp\left(i2\pi\frac{m}{L}x\right)$$



# ある波長の波を切り出す

波長 $L/m$ の指数関数と $L/n$ の指数関数についてこういう計算をしてみる

$f(x)$ の1周期分だけ積分（積分については後半で）

複素共役

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underbrace{\exp\left(i2\pi\frac{m}{L}x\right)}_{\text{波長 } L/m} \underbrace{\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)}_{\text{波長 } L/n} dx$$

この答は　$m$ と $n$ が異なるとき（別の波長）　0
　　　　　$m$ と $n$ が等しいとき（同じ波長）　$L$

指数関数はこの
「同期しないと積分が0」という性質をもつ　直交関数系



# フーリエ級数展開とフーリエ係数

ある整数

そこで　$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right) dx$　を計算してみる

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$　なので

$$\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right) \exp\left(-i2\pi\frac{k}{L}x\right) dx$$

級数の各項を積分すると, $n = k$ の項だけは積分すると　$L$
他の項は積分すると　0

つまりこの積分の答は　$\frac{1}{L}\cdot La_k = a_k$　係数が求まった

# まとめ・フーリエ級数展開とフーリエ係数

周期 $L$ の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

という波の足し合わせ(級数)で表される(フーリエ級数展開)

係数 $a_n$(フーリエ係数)は

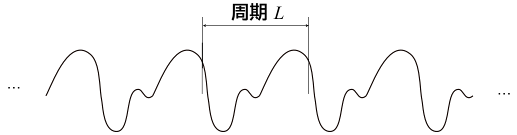
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx$$ という積分で表される



フーリエ変換🤔

# 周期関数は, フーリエ級数で表される

周期 $L$ の周期関数 $f(x)$

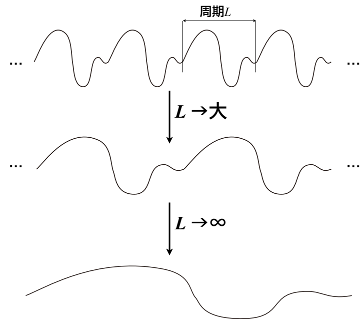



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$ という, 波の足し合わせ(級数)で表される(フーリエ級数展開)

係数 $a_k$(フーリエ係数)は $$a_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx$$

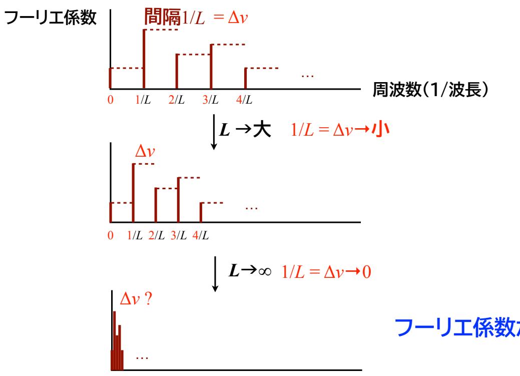


# 周期関数でない場合は？




非周期関数は周期が無限大と考える

# 周期 L が大きくなっていくと




間隔$1/L$ は周波数の差

これを$\Delta\nu$ で表す

フーリエ係数が隙間なく並ぶ

↓

もはや足し算はできない



# 級数から積分へ

周期 $L$ の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\exp\left(-i2\pi\frac{n}{L}x\right)dx$$

$1/L = \Delta\nu$ と書き換える

紛らわしいので別の文字にしただけ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$$



# 級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので, $\nu$ であらわす

$L\to\infty$ のとき $\Delta\nu\to 0$

このとき $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$ のなかの総和(Σ)が,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu$$

という積分になる

？？？😮

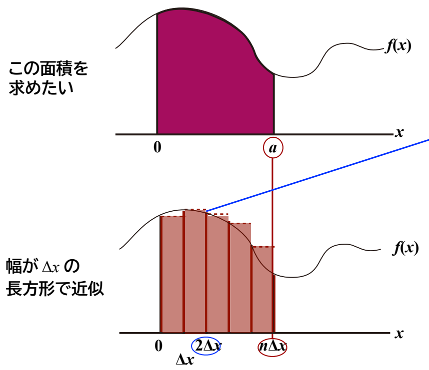


# 積分とは？

★ところで:
長方形の面積＝縦×横？

長方形の面積は, 有限個の
正方形を敷き詰めたときの
正方形の面積の合計
（有限加法性）

正方形の面積は「定義」




高さ $f(2\Delta x)$

短冊の面積の合計

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

↓ $\Delta x \to 0$ 区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$

これが積分

# 級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので, $\nu$ であらわす

$L\to\infty$ のとき $\Delta\nu\to 0$

このとき $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\Delta\nu\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau)\exp\left(-i2\pi n\Delta\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi n\Delta\nu x\right)$ のなかの総和(Σ)が,

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu$$

という積分になる

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

↓ $\Delta x\to 0$ 区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x)dx$$

！！！
積分では,
幅 $d\nu$ が大事です



# フーリエ変換

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp\left(-i2\pi\nu\tau\right)d\tau\right)\exp\left(i2\pi\nu x\right)d\nu$$

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx$$ と分けて書く

フーリエ変換対　という

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp\left(i2\pi x\nu\right)d\nu$$



# フーリエ変換

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx$$ フーリエ変換

「周波数」

関数 $f(x)$ にどのような周波数の波がどれだけ含まれているか,「波を切り出す」

フーリエ係数の並びだったのが, 周波数の間隔がどんどん小さくなって,
ついにはひとつの関数 $F(\nu)$ になる

関数の表し方
[基底]が
変わっただけ
(先で出てきます)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp\left(i2\pi x\nu\right)d\nu$$ 逆フーリエ変換

「位置」

周波数 $\nu$ の波 $\exp(i2\pi x\nu)$ に, 対応するフーリエ係数 $F(\nu)$ をかけたものを
合計(積分)すると $f(x)$ に戻る



# 2次元の場合は

1次元のフーリエ変換　$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp\left(-i2\pi\nu x\right)dx$

2次元のフーリエ変換　$F(\nu_x,\nu_y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\{-i2\pi(\nu_x x+\nu_y y)\}dxdy$

この式は, $x, y$ それぞれに1次元のフーリエ変換をしたことになっている

$$F(\nu_x,\nu_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp(-i2\pi\nu_x x)dx\right]\exp(-i2\pi\nu_y y)dy$$

注：　$\exp(\underbrace{a+b}_{\text{たし算}})=\underbrace{\exp(a)\exp(b)}_{\text{かけ算}}$

この性質を[分離可能(separable)]であるという　(あとで出てきます)