

2024年度秋学期

画像情報処理

第2部・画像情報圧縮 /

第6回

ベクトルと行列について
高速フーリエ変換



関西大学総合情報学部
浅野 晃

ベクトルと行列の考え方

たくさんの数の組を、ひとまとめに計算する

ひとつの組がいくつの数でできていても、
同じように計算できるようにする

組の中身を意識せずにすむことによって、
さらに複雑な計算を考えることができる
(現代のプログラミングも同じ考えかた)

ベクトルの計算

$z = a_1x_1 + a_2x_2$ この計算を

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ と書く}$$

行ベクトル 列ベクトル

問題1

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pause //

問題1

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(解答例)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$$



ベクトルの計算が2つ

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

この計算をまとめて

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書く

行列

問題2

問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pause //

問題2

問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

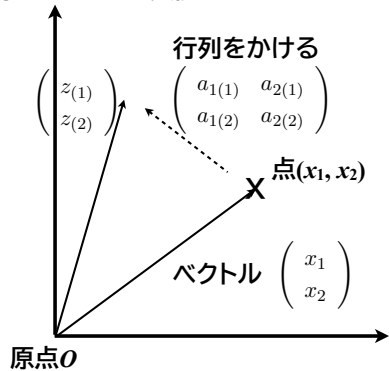
(解答例)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



図形的意味

別のベクトルに変換



問題3

問題 3

問題 2 のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と、問題 2 の計算結果のベクトルを、座標平面に図示してください。

Pause !!

問題3

問題 3

問題 2 のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と、問題 2 の計算結果のベクトルを、座標平面に図示してください。

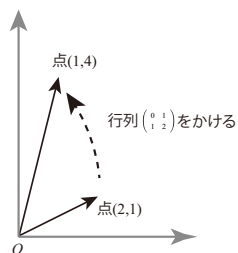


図 2: 問題 3 の解答例.

定数倍の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \text{ の意味}$$

行列と行列の計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

この計算をまとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$

$\lambda_{(1)}$ に関する計算

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

行列とベクトルの計算が2つ

問題4

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pause !!

問題4

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(解答例) 右側の行列を, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の2つのベクトルに分けます。

ひとつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

問題4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり, ふたつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 1 \times 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります。よって, これらの2つのベクトルを並べて

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。■

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

要素がp個の場合

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

は,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}$$

なんのために???

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

行列を1文字で表す

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

$$SP = P\Lambda$$

複雑な計算を、あたかも数の計算のように単純に考える

ただし

行列の積は、交換ができない
ABとBAが等しいとは限らない

転置行列・対称行列

$$\text{行列 } A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ 転置行列 } {}^t A, A^t, A^T, A'$$

ある行列とその転置行列が同じとき、**対称行列**という

問題5

問題 5

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めてください。
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は、それぞれは対称行列ですか。

Pause //

問題5

(解答例)

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ です。
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で、もとの行列とは異なるので、対称行列ではありません。一方、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で、もとの行列と同じなので、これは対称行列です。■

逆行列

行列には割り算はない

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \begin{array}{l} \text{単位行列} \\ \text{(かけ算をしても何もおこらない)} \end{array}$$

となる A^{-1} を、 A の**逆行列**という

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

数の場合は

$$a \times \frac{1}{a} (\text{逆元}) = 1 (\text{単位元})$$

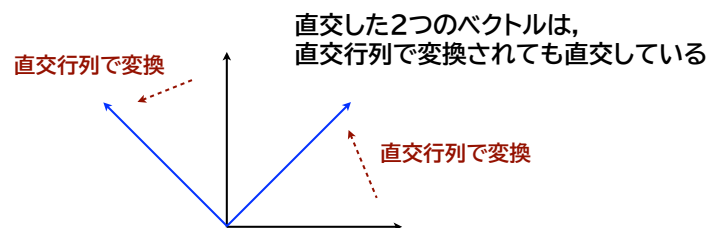
行列の場合は

$$AA^{-1} (\text{逆行列}) = I (\text{単位行列})$$

直交行列

逆行列が転置行列と同じであるような行列を**直交行列**という

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ 直交行列の列ベクトルどうしは直交している}$$



問題6

問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

が直交行列であることを確かめてください。

Pause //

問題6

(解答例) 次のとおりです。

$$\begin{aligned} R'R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times (-1) & 1 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RR' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 & (-1) \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times (-1) + 1 \times 1 & (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

問題7

問題 7

- ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交していることを、図に描いて確認してください。
- 座標軸の x 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で、 y 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で変換して、変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。

Pause //

問題7

(解答例) 1. 図4のとおりで、この2つのベクトルは直交しています。

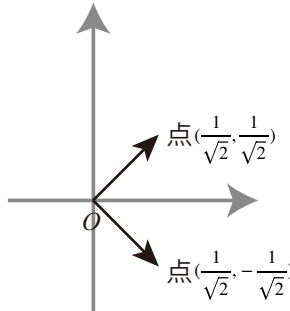


図4: 問題7-1.

問題7

2. x 軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

で、 y 軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

です。つまり、この行列の2つの列ベクトルがそのまま取り出されます(上で出てきた「単位行列」を思い出してください)。したがって、図5のように、 x, y 軸が、直交したまま45度回転したものに交換されたということが出来ます。■

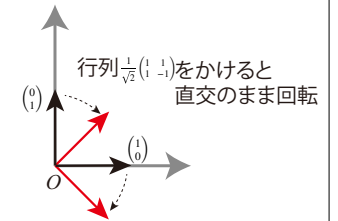


図5: 問題7-2.

高速フーリエ変換 🤖

「高速」フーリエ変換とは

高速フーリエ変換(Fast Fourier Transformation, FFT)

離散フーリエ変換の計算に含まれる掛け算の回数を減らす工夫

コンピュータでは、掛け算は足し算に比べて時間がかかるので
掛け算を減らすと全体の計算にかかる時間を短くできる

例えば

$$5 \times 4 + 3 \times 5 \quad \text{掛け算は2回}$$

$$5 \times (4 + 3) \quad \text{掛け算は1回}$$

4点だけの信号の離散フーリエ変換

4点だけの信号(N = 4)の離散フーリエ変換を
これを行列で書いてみる

離散フーリエ変換の式は

$$U(k) = \sum_{n=0}^3 u(n) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{4} n\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 3)$$

1つの $U(\cdot)$ を計算するのに、掛け算を4回

全部で $4^2 = 16$ 回の掛け算🥹

行列で表すと

行列で表すと $W \equiv \exp\left(-i\frac{2\pi}{4}\right)$ とおいて

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0\cdot0} & W^{0\cdot1} & W^{0\cdot2} & W^{0\cdot3} \\ W^{1\cdot0} & W^{1\cdot1} & W^{1\cdot2} & W^{1\cdot3} \\ W^{2\cdot0} & W^{2\cdot1} & W^{2\cdot2} & W^{2\cdot3} \\ W^{3\cdot0} & W^{3\cdot1} & W^{3\cdot2} & W^{3\cdot3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

順序を入れ替える

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

右辺のベクトルで、要素の順序を入れ替える

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^4 & W^2 & W^6 \\ W^0 & W^6 & W^3 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

指数関数 / 三角関数の性質を使って

$W^4 = \exp\left(-i2\pi \frac{4}{4}\right) = 1 = W^0$ という周期関数の性質があるので

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^4 & W^2 & W^6 \\ W^0 & W^6 & W^3 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad \text{は、}$$

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^0 & W^2 & W^2 \\ W^0 & W^2 & W^3 & W^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad \text{と表せる}$$

2つの行列の積に分ける

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^0 & W^2 & W^2 \\ W^0 & W^2 & W^3 & W^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad \text{の右辺の行列を, 2つに分ける}$$

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0W^0 & W^0W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1W^0 & W^1W^2 \\ W^0 & W^0 & W^2W^0 & W^2W^0 \\ W^0 & W^2 & W^3W^0 & W^3W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad \text{と表せる}$$

後半の「行列×ベクトル」は

掛け算4回

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad \text{の後半の行列} \times \text{ベクトルは}$$

$$\text{Wの掛け算4回} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \end{pmatrix}$$

$$\text{掛け算4回} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}$$

この2つの「分割された行列」の計算になっている

掛け算の回数は $4 + 4 \times 2 = 12$ 回

元の $4^2 = 16$ 回から減った💡

N=8の場合は

$$\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \quad \text{これらは, N=2のフーリエ変換}$$

N=8 のときは 元々 $8^2 = 64$ 回の掛け算が必要

N=8 のフーリエ変換 →

掛け算8回 + $2 \times$ (N=4 のフーリエ変換) →

掛け算8回 + $2 \times$ (掛け算4回 + $2 \times$ (N=2 のフーリエ変換)) →

掛け算8回 + 掛け算8回 + $2 \times 2 \times$ 掛け算4回

掛け算の回数は $8 + 8 + 4 \times 4 = 32$ 回💡

「分割統治戦略」

一般に, N点のフーリエ変換には掛け算が N^2 回必要だったのが, $\log_2 N$ 段階に分割され, それぞれで N 回の掛け算を行うので(概ね), $N \log_2 N$ に比例した回数で済む

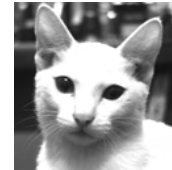
このように, 問題を半分, 半分, 半分, ...に分けていく方法は, 他にもいろいろなところで使われている (「クイックソート」等)

さて、第2部の本題へ💡

第2部の本題へ

第2部は画像データ圧縮

画像を、各画像で大きく異なる部分と
どの画像でもあまりかわらない部分にわけ



どの画像でもあまり変わらない部分 なんて、ある？

直交変換すると、
「大まかな部分」「細かい部分」が別
なるように組み替えられる

どの画像でもあまりかわらない部分は、ごまかす

フーリエ変換も、行列で表すと直交変換の一種