2024年度秋学期

画像情報処理

第2部・画像情報圧縮 ／

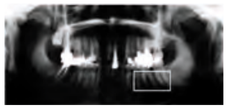
第7回
主成分分析と
Karhunen-Loève変換

関西大学総合情報学部
浅野 晃

画像情報圧縮💡

画像情報圧縮の必要性

この画像では，1画素の明るさを0〜255の整数で表す
1画素に，2進数8桁 ＝ 8ビット ＝ 1バイト必要
1000万画素のデジタル画像は，約10メガバイト必要



こういう画像は，1画素 ＝ 16ビットで，
2倍の20メガバイト必要なこともある

カラー画像ならば，R,G,Bで3倍必要

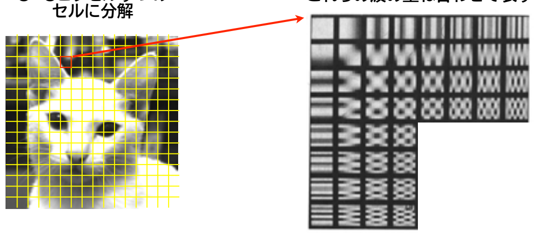
動画ならば，1秒でこのデータ量の30倍？60倍？

JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし，一部を省略して，データ量を減らす

8×8ピクセルずつの
セルに分解

ひとつのセルを，
これらの波の重ね合わせで表す



細かい部分は，どの画像でも大してかわら
ないから，省略しても気づかない

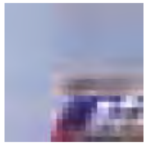
省略すると，データ量が減る

（図はA. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processingより転載）

画像情報圧縮の例

データ量:80KB

データ量:16KB



(8×8ピクセルのセルが見える)

ところで，本当に「波」でいいんですか？🤔

まあ，結局「波」でいいんですけどね…

もっと根本的な原理から説明します。

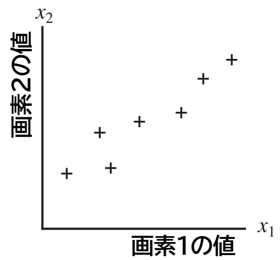
「主成分分析」と「直交変換」

主成分分析🤔

重要な成分と，そうでない成分

しばらく，画素が2つしかない画像を考える

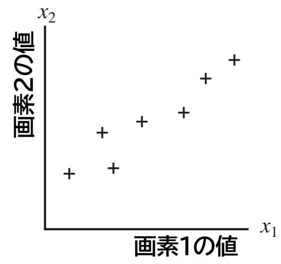
たくさんの2画素画像を考える



ひとつの2画素画像は，
この図の1つの点で表される

（散布図という）

どちらかの画素値を省略できるか？

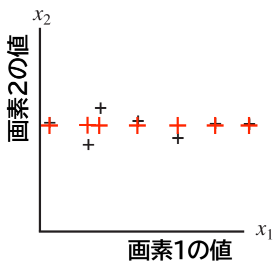


たくさんの2画素画像が
こんなふうに散らばって（分布して）いたら

各画像の違いを表現するのには，
どちらの画素も省略することはできない

どちらの画素値の分散も大きい

こんな分布なら



画素2の値は，どの画像でもあまり変わりない
（分散が小さい）

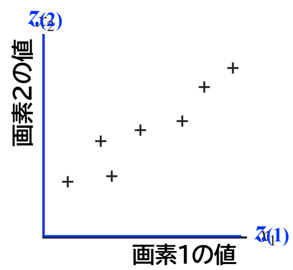
各画像の違いを表現するのに，
画素2はそれほど必要ない

画素2の値は，それらの平均に置きかえてしまってもそれほど変わらない

画素2の値はいちいち記録しなくてもいいから，データ量が半分に減る

そういう都合のいい分布に変換できないの？

散布図上である方向に広がっているなら
（x_1, x_2に相関があるなら）できます。こうすればいい



x_1, x_2を回転して，新たに$z_{(1)}$，$z_{(2)}$とすればよい

$z_{(1)}$の分散がもっとも大きくなるように回転する

このとき $z_{(1)}$と$z_{(2)}$の相関がなくなる

これをするのが［主成分分析］

主成分分析

x_1, x_2から次の式で zを求めるものとし，
zの分散$V(z)$が最大になるa_1, a_2を求める

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$V(z)$を求めるために，次の量を用いる

x_{1i}, x_{2i}　n枚中のi番目の画像の，x_1, x_2の値

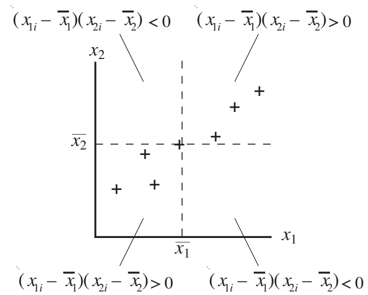
$\bar{x_1}, \bar{x_2},$　x_1, x_2の全画像にわたる平均

s_{11}, s_{22}:　x_1, x_2の分散

さらに共分散も用いる

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{x_1})(x_{2i} - \overline{x_2})$$

x_1, x_2の共分散



共分散の正負 ＝ 相関の正負

（共分散を x_1, x_2 の標準偏差で
割ったものが相関係数）

さて，zの分散V(z)は

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 \\ &= a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} \end{aligned}$$

(3)式

$V(z)$が最大になるa_1, a_2を求める

xからzへの変換は「回転」（伸び縮みしない）→　$a_1^2 + a_2^2 = 1$

固有値問題

定数 λ を使って

$$\begin{aligned} a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1 \lambda \\ a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2 \lambda \end{aligned}$$

が得られる（付録1）

行列で書くと

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}}_{\text{分散共分散行列}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\text{固有ベクトル}} = \underbrace{\lambda}_{\text{固有値}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトルを求める問題を
「固有値問題」という（解き方は略）

第1主成分

固有ベクトル $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ が2組得られて，しかも$V(z)=\lambda$となる(付録2)

固有値 λ

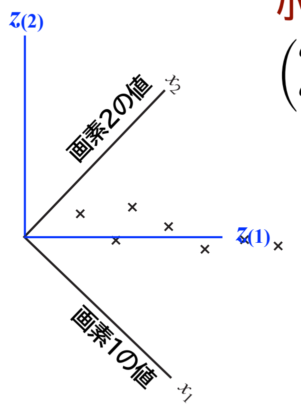
大きい方の λ($\lambda_{(1)}$とする)に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix}a_{1(1)}\\a_{2(1)}\end{pmatrix}$ を使って求めた z($z_{(1)}$ とする) が，求めたかった z

[第1主成分]という

分散が最大の軸

2画素画像の分布を表すのに，もっとも重要な成分

第2主成分，それ以下の主成分



小さい方の λ($\lambda_{(2)}$とする)に対応する固有ベクトル

$\begin{pmatrix}a_{1(2)}\\a_{2(2)}\end{pmatrix}$ を使って求めた z($z_{(2)}$ とする) は

[第2主成分]

分散が小さい方で，重要でないほうの成分

2画素でなくp画素だったら？

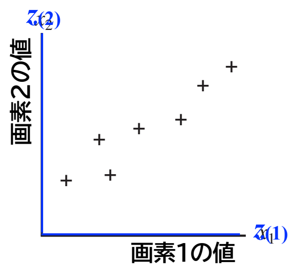
固有値(＝分散)が大きい方から小さい方に向かって，

第1,2,3,..., p主成分

もっとも「重要でない」成分

主成分分析と直交変換🤔

このときz(1)とz(2)は無相関



x_1, x_2を回転して，新たに$z_{(1)}$, $z_{(2)}$ とする

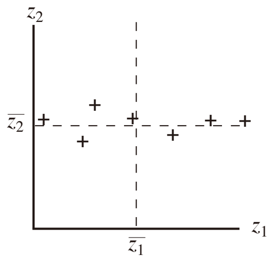
$z_{(1)}$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

このとき$z_{(1)}$, $z_{(2)}$ の相関がなくなる。

なぜなら

相関がないときは

相関がない→$(z_{1i}-\bar{z}_1)(z_{2i}-\bar{z}_2)$ の正負がつりあう



共分散＝0

先ほど求めた
$z_{(1)}$，$z_{(2)}$ はこうなっている → 本当？

分散共分散行列はどうなる？

主成分分析と分散共分散行列

固有値のうち, 大きい方を $\lambda_{(1)}$, 小さい方を $\lambda_{(2)}$

対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$

これらは

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)}\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)}\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$ をみたす

分散共分散行列の対角化

まとめると

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}}_{P}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

つまり $SP = P\Lambda$

すなわち $\Lambda = P^{-1}SP,\ S = P\Lambda P^{-1}$

（分散共分散行列の）対角化という

対称行列の対角化

分散共分散行列 S は
対称行列

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

$s_{12} = s_{21}$
共分散

対称行列の固有ベクトルは直交する（詳細略）

Pは直交行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$

直交行列の逆行列は転置行列（逆回転）

すなわち $S = P\Lambda P'$

対角化の意味

$$S = P\Lambda P'$$

分散共分散行列は

P'で変換し
そこでは分散共分散行列がΛで
Pで戻る

「この世」　「あの世」

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

あの世では共分散が0
→相関がない

P′ で変換された「あの世」とは？

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

だから

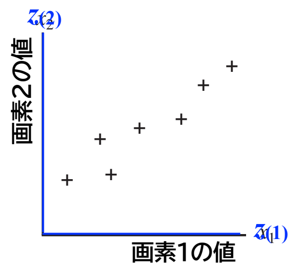
これが P'

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

直交行列で変換するから
直交変換という

つまり，x から z に変換すると，
$z_{(1)}$ と$z_{(2)}$ の共分散が0→相関がない

たしかにz(1)とz(2)は無相関



x_1, x_2を回転して，新たに$z_{(1)}$, $z_{(2)}$ とする

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

このときたしかに$z_{(1)}$, $z_{(2)}$ には相関がない
分散共分散行列は対角行列となる

画素がp個あっても同じ

xからzへの，P'による直交変換

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} & \cdots & a_{p(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{p(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1(p)} & a_{2(p)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Pは固有値問題の解　分散共分散行列S

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

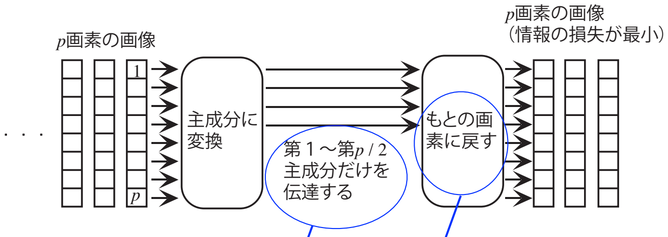
S

$$S \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

P　P　Λ

Karhunen-Loève変換（KL変換）

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも
情報の損失は最小

もどすときは，

Karhunen-Loève変換（KL変換）

もどすときは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \simeq (P')^{-1} \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix}$$

伝送されて来なかった主成分は，
平均に置き換えておく

KL変換の大問題

主成分を求めるには，分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには，
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能。

とは，最近は言えなくなってきていますが…
それでも，画像データ圧縮のために，わざわざ
世の中のすべての画像を「学習」するのか？

続きは

分散共分散行列がわからないから，
どういう直交変換をしたらいいかもわからない

経験的にうまくいく直交変換を行う

画像をベクトルではなく，2次元のまま行列で表して
「行列の直交変換」を考え，
直交変換のようすが目に見えるようにする。

適切な直交変換を選ぶ（実は結局フーリエ変換とその変形）