2024年度秋学期

画像情報処理

第2部・画像情報圧縮 ／

第9回
離散フーリエ変換と
離散コサイン変換

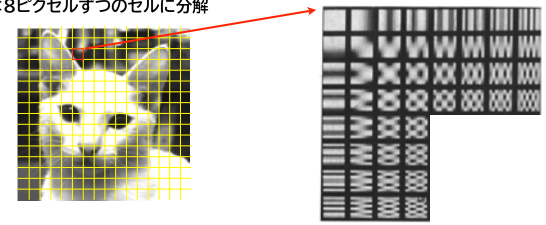
関西大学総合情報学部
浅野 晃

JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし，一部を省略して，データ量を減らす

8×8ピクセルずつのセルに分解

ひとつのセルを，
これらの波の重ね合わせで表す



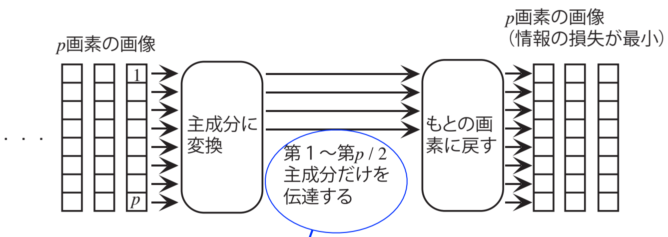
細かい部分は，どの画像でも大してかわら
ないから，省略しても気づかない

省略すると，データ量が減る

（図はA. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processingより転載）

Karhunen-Loève変換（KL変換）

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも
情報の損失は最小

KL変換の大問題

主成分を求めるには，分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには，
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能😲

そこで

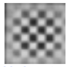
ベクトルの直交変換を，行列の直交変換におきかえることで，
どういう変換かが見えるようにする

原画像Xは，m^2個の基底画像にそれぞれ
変換後画像Zの各要素をかけて足し合わせたものになっている

どういう直交変換（ユニタリー変換）を用いるかを，基底画像を目でみて決める

$$X = z_{11}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1' + z_{12}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2' + \cdots + z_{mm}\boldsymbol{r}_m\boldsymbol{r}_m'$$


基底画像

基底画像

基底画像

こんな「基底画像セット」なら，
最後の方の基底画像は
ごまかせそうだ

そこで

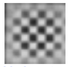
ベクトルの直交変換を，行列の直交変換におきかえることで，
どういう変換かが見えるようにする

原画像Xは，m^2個の基底画像にそれぞれ
変換後画像Zの各要素をかけて足し合わせたものになっている

どういう直交変換（ユニタリー変換）を用いるかを，基底画像を目でみて決める

$$X = z_{11}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1' + z_{12}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2' + \cdots + z_{mm}\boldsymbol{r}_m\boldsymbol{r}_m'$$


基底画像

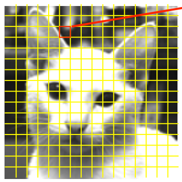
基底画像

基底画像

基底画像として
波を用いる
フーリエ変換

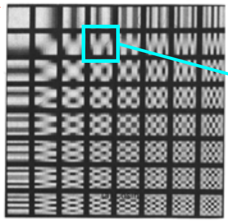
JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし，一部を省略して，データ量を減らす

8×8ピクセルずつのセルに分解



ひとつのセルを，
これらの波の重ね合わせで表す



このひとつ
ひとつが
基底画像

細かい部分は，どの画像でも大してかわら
ないから，省略しても気づかない

省略すると，データ量が減る

2次元離散フーリエ変換を行列で🤔

2次元フーリエ変換

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$$

指数関数の性質から

$$\begin{aligned} F(\nu_x, \nu_y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp(-i2\pi\nu_x x) \exp(-i2\pi\nu_y y) dx dy \\ &= \underline{\int_{-\infty}^{\infty}} \underline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right]} \, \underline{\exp(-i2\pi\nu_y y) dy} \end{aligned}$$

*x*方向のフーリエ変換　*y*方向のフーリエ変換

2次元フーリエ変換は分離可能

2次元離散フーリエ変換

1次元離散フーリエ変換

$$U(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} n) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

2次元離散フーリエ変換（分離可能な形式）

$$U(k,l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} u(m,n) \exp(-i2\pi \frac{k}{M} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

縦横の大きさが同じなら

$$U(k,l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} u(m,n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

離散フーリエ変換を行列で表す

行列の直交変換の形で表す　$Z = RXR'$

$$U(k,l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} u(m,n) \exp(-i2\pi \frac{k}{N} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

$$\downarrow$$

$${}^{l\downarrow}\big(Z = \overset{k\rightarrow}{U(k,l)}\big) = {}^{l\downarrow}\big(\overset{n\rightarrow}{R}\big) \cdot {}^{n\downarrow}\big(X = \overset{m\rightarrow}{u(m,n)}\big) \cdot {}^{m\downarrow}\big(\overset{k\rightarrow}{R'}\big)$$

離散フーリエ変換を行列で表す

前ページのように行列を配置すると

$$R' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & k\rightarrow & & \end{array} \\ m\downarrow & \begin{pmatrix} e^{-i2\pi\frac{0}{N}0} & \cdots & e^{-i2\pi\frac{k}{N}0} & \cdots & e^{-i2\pi\frac{N-1}{N}0} \\ \vdots & \ddots & & & \\ e^{-i2\pi\frac{0}{N}m} & & e^{-i2\pi\frac{k}{N}m} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ e^{-i2\pi\frac{0}{N}(N-1)} & & & & e^{-i2\pi\frac{N-1}{N}(N-1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & n\rightarrow & & \end{array} \\ l\downarrow & \begin{pmatrix} e^{-i2\pi\frac{0}{N}0} & \cdots & e^{-i2\pi\frac{0}{N}n} & \cdots & e^{-i2\pi\frac{0}{N}(N-1)} \\ \vdots & \ddots & & & \\ e^{-i2\pi\frac{l}{N}0} & & e^{-i2\pi\frac{l}{N}n} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ e^{-i2\pi\frac{N-1}{N}0} & & & & e^{-i2\pi\frac{N-1}{N}(N-1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

離散フーリエ変換を行列で表す

指数関数がややこしいので

$$W_N = \exp(-\frac{i2\pi}{N})$$

とおくと,

$$R = \begin{pmatrix} W_N^{0\cdot 0} & \cdots & W_N^{0\cdot n} & \cdots & W_N^{0\cdot(N-1)} \\ \vdots & \ddots & & & \\ W_N^{l\cdot 0} & & W_N^{ln} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ W_N^{(N-1)\cdot 0} & & & & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

$$Z = RXR$$

ところで, 本当にユニタリー？

「ある列」と「ある列の複素共役」の内積

異なる列なら0, 同じ列なら1 ならユニタリー

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{ln} \cdot (W_N^{ln'})^* &= \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-\frac{i2\pi ln}{N}) \exp(\frac{i2\pi ln'}{N}) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-\frac{i\{(n-n')2\pi\}l}{N}) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} \end{aligned}$$

異なる列(等比数列の和)

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} &= \frac{1 - W_N^{(n-n')N}}{1 - W_N^{(n-n')}} \\ &= \frac{1 - \left(W_N^N\right)^{(n-n')}}{1 - W_N^{(n-n')}} \\ &= \frac{1 - 1^{(n-n')}}{1 - W_N^{(n-n')}} = 0 \end{aligned}$$

OK

同じ列

$$\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = N$$

NG

ユニタリー離散フーリエ変換

いままでに説明した $\boldsymbol{R}$ だと $RR'^* = NI$

ユニタリーでない

$$W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(-\frac{i2\pi}{N})$$ とおけば

$RR'^* = I$ となって, ユニタリーになる

$$Z = RXR$$
$$X = R^* Z R^*$$

離散フーリエ変換はユニタリー変換の一種である

→ 離散フーリエ変換も「座標の回転」の一種である

「画素値の並び」から, 「『波』を表す基底画像の組み合わせ」へ

離散コサイン変換🤔

離散コサイン変換

フーリエ変換では，複素数を扱う必要がある

そこで，実数だけで計算できる変換　　JPEG方式もこれを用いている

$$
R \;=\; \begin{array}{cc} & n\rightarrow \\ l\downarrow & \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & r(n,l) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \end{array},
$$

$$
r(n,l) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & l = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{2N} & l \neq 0 \end{cases}
$$

離散コサイン変換とフーリエ変換

離散コサイン変換は，関数を折り返して偶関数にしたもののフーリエ変換に相当

偶関数（ $f(x) = f(-x)$ ）のフーリエ変換は，実数の計算になる

$$
\begin{aligned}
F(\nu_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx + \int_{0}^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx
\end{aligned}
$$

第1項の x を $-x$ に変数変換

$i2\pi(\nu_x x)$

$$
F(\nu_x) = \int_{\infty}^{0} f(-x) \exp\{-i2\pi(\nu_x(-x))\}(-dx) + \int_{0}^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx
$$

$f(x)$

$\int_0^\infty \ldots \; dx$

偶関数のフーリエ変換

つまり

$$
F(\nu_x) = \int_{0}^{\infty} f(x) \exp\{i2\pi(\nu_x x)\} dx + \int_{0}^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx
$$

$$
F(\nu_x) = \int_{0}^{\infty} f(x) \left[\exp\{i2\pi(\nu_x x)\} + \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\}\right] dx
$$

指数関数と三角関数の関係から

$$
F(\nu_x) = 2 \int_{0}^{\infty} f(x) \cos 2\pi(\nu_x x) dx
$$

実数の計算になる

離散コサイン変換

離散コサイン変換は，関数を折り返して偶関数にしたもののフーリエ変換に相当

1次元の場合

折り返す

$u(N-1), u(N-2), \ldots, u(1), u(0) \quad u(0), u(1), \ldots, u(N-2), u(N-1)$

$2N$ 要素の数列

離散コサイン変換

N 要素の離散コサイン変換は　$U(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) & k = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}} u(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} & k \neq 0 \end{cases}$

$k \neq 0$ の場合を考えると

$$
\begin{aligned}
U(k) &= \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{i(2n+1)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(2n+1)k\pi}{2N} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i((-n)-1/2)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(n+1/2)k\pi}{2N}
\end{aligned}
$$

cos を指数関数で表す

離散コサイン変換

$$
U(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i((-n)-1/2)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(n+1/2)k\pi}{2N}
$$

これは，折り返した数列に対して

$u(N-1),\ u(N-2),\ \ldots,\ u(1),\ u(0)\ \ u(0),\ u(1),\ \ldots,\ u(N-2),\ u(N-1)$

$\cdots\ -\frac{3}{2}$ 番 $-\frac{1}{2}$ 番 $\frac{1}{2}$ 番 $\frac{3}{2}$ 番 $\cdots$

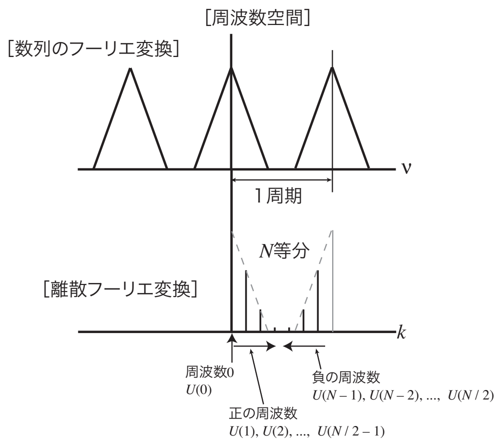
（0 番）

と番号をつけ直して
フーリエ変換をしたのと同じ

2N項のフーリエ変換をしていることになるので，
$k = 0$ が周波数0，$k = 1, \ldots, N-1$ の順に周波数が高くなる

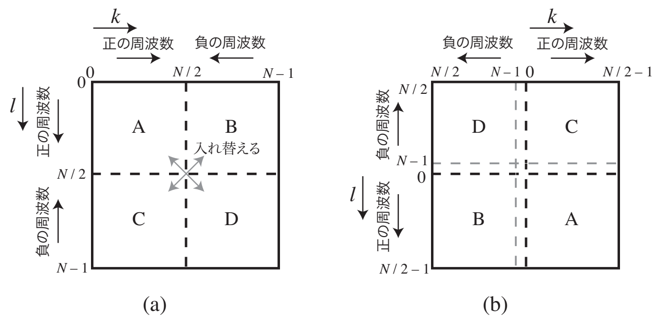
離散フーリエ変換と正負の周波数

1次元の離散フーリエ変換では
こういう折り返し



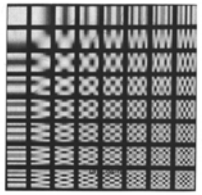
離散フーリエ変換と正負の周波数

2次元の離散フーリエ変換でもこういう折り返しがあったが，
離散コサイン変換では折り返しはない

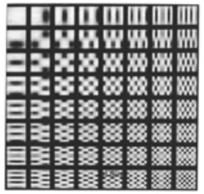


実例📺

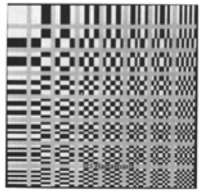
基底画像の例



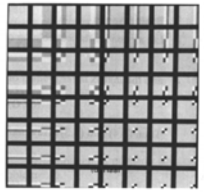
コサイン変換



サイン変換



Hadamard変換(-1と1)



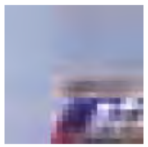
Haar変換

A. K. Jain, Fundamentals of
B. Digital Image Processing (1988)

画像情報圧縮の例

データ量:80KB

データ量:16KB



（8×8ピクセルのセルが見える）

リンギング（モスキートノイズ）

※粗い波だけを重ねて
エッジ（明暗の境界線）を
表すと生じる