2024年度秋学期

画像情報処理

第3部・CTスキャナ — 投影からの画像の再構成 ／

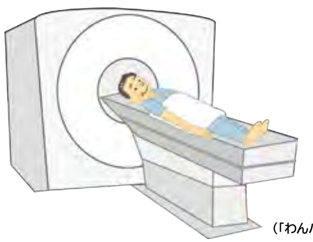
第10回
Radon変換と投影切断面定理

関西大学総合情報学部
浅野　晃

CTスキャナとは🤔

CTスキャナとは

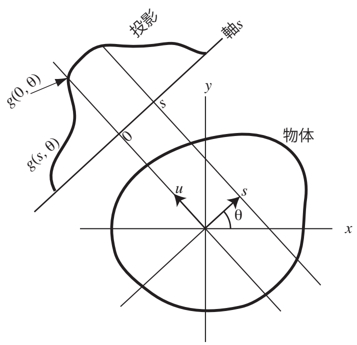
CT（computed tomography） ＝ 計算断層撮影法



（「わんパグ」http://kids.wanpug.com/illust234.html）

体の周囲からX線撮影を行い，そのデータから断面像を計算で求める

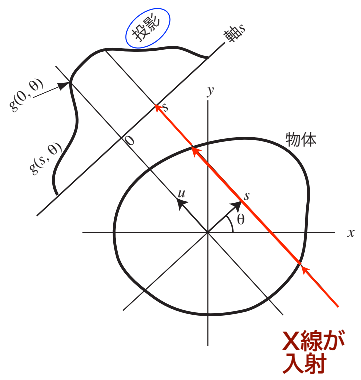
CTを実現するには



ある方向からX線を照射し，
その方向での吸収率（投影）を調べる

すべての方向からの投影がわかれば，
元の物体における吸収率分布がわかる

投影とは

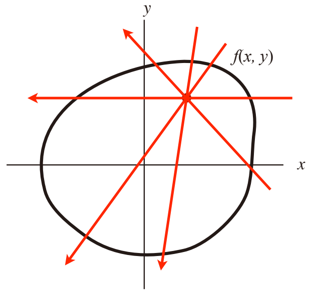


X線がある直線に沿って物体を通過するとき，
直線上の各点で吸収される

通過したX線の量は，
入射した量に吸収率の積分（線積分）を
かけたものになっている

投影＝吸収率の線積分
直線上の吸収率の合計であって，
どの点で吸収されたかはわからない

Radonの示した定理



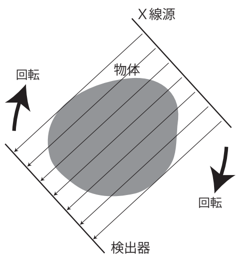
2次元関数の任意の点での値は

その点を通るすべての投影（線積分）が
わかれば求められる

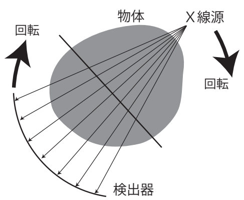
どうやって求めるかは，あとで説明します。

各方向からの投影のしかた

理論上はこんなふうに考える



実際はこのようにX線を当てる

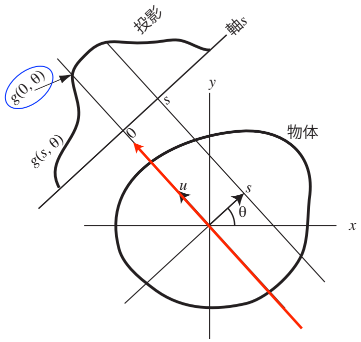


物体の1点について考えれば，投影する順番が異なるだけで，
各方向の投影が得られるのは同じ

Radon変換とray-sum🤔

Radon変換

投影を2次元の積分で表す



この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

つまり　$x\cos\theta + y\sin\theta = 0$

この線上だけを積分する

→この式を満たす点だけを積分する

$$g(0,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta)dxdy$$

デルタ関数で表せる

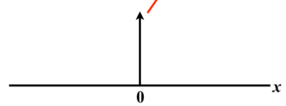
ディラックのデルタ関数$\delta(x)$

$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$x = 0$ の1点以外すべてゼロ　　$x = 0$ をはさんで積分すると1

高さは，何だともいえない

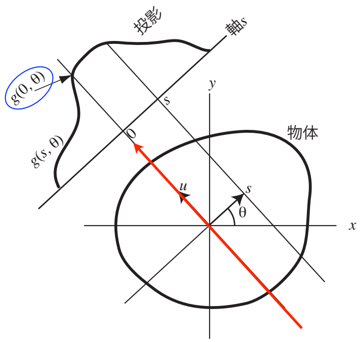
（「無限」でもない。なぜなら→ $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x)dx = k$



こんなふうに表さざるを得ない

Radon変換

投影を2次元の積分で表す



この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

つまり　$x\cos\theta + y\sin\theta = 0$

この線上だけを積分する

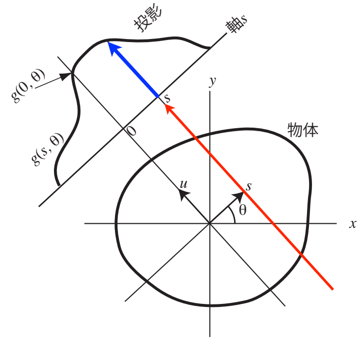
→この式を満たす点だけを積分する

$$g(0,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta)dxdy$$

デルタ関数で表せる

Radon変換

$g(s,\theta)$は？



この線上では

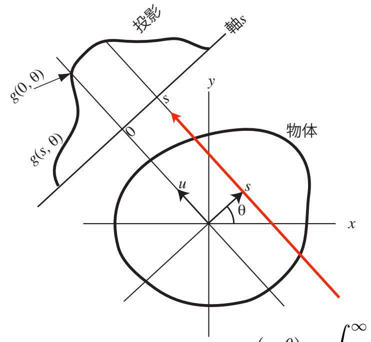
$x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0$

$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy$$

Radon変換

ray-sum

投影を1次元の線積分で表す



(x, y) と (s, u) の関係は θ の回転

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

(x, y) を (s, u) で表す

この線上では
s が一定で u が変化

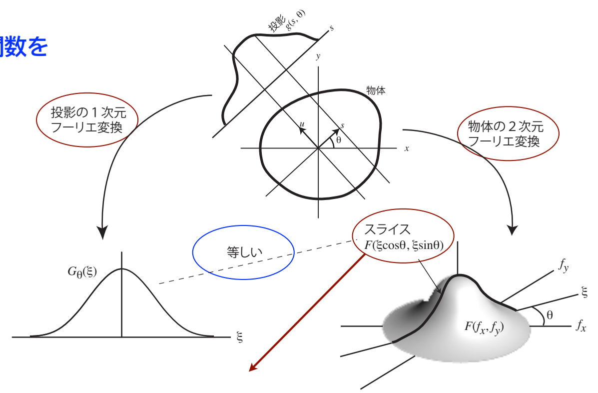
$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)du$$

ray-sum

投影切断面定理🤔

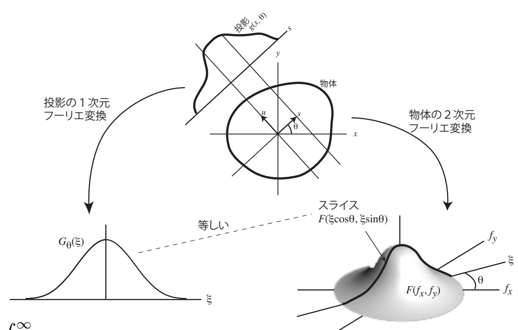
投影切断面定理

投影群から2次元関数を
再構成する



「スライス」がすべてそろえば，2次元逆フーリエ変換で2次元関数が再構成できる

投影切断面定理の証明



$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \theta)\exp(-i2\pi\xi s)ds$$

ray-sum

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)du$$

投影切断面定理の証明

$$
\begin{aligned}
G_\theta(\xi) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta) \\
&\quad \times \exp(-i2\pi\xi s)\,dsdu
\end{aligned}
$$

(x, y) と (s, u) の関係

$$
\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}
$$

$dxdy = dsdu$
どちらも正方座標の小さな正方形

x, y に書き戻す

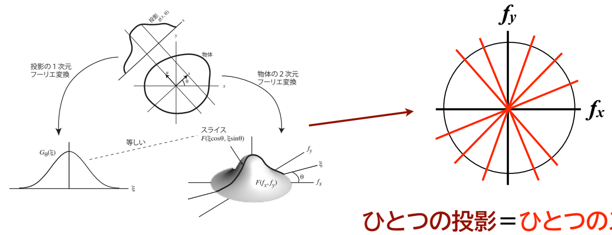
$$
\begin{aligned}
G_\theta(\xi) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \\
&\quad \exp(-i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))\,dxdy \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \\
&\quad \exp(-i2\pi((\xi\cos\theta)x + (\xi\sin\theta)y))\,dxdy \\
&= F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)
\end{aligned}
$$

これらを変数と考える

θ 方向のスライス

フーリエ変換法による再構成の問題点

2次元フーリエ変換の「すべてのスライス」を求めることはできない

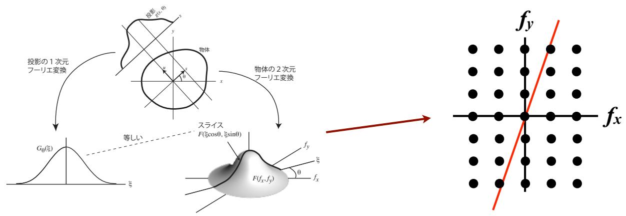


ひとつの投影＝ひとつのスライス

有限個の投影では, 2次元フーリエ変換を埋め尽くすことはできない →補間を行う

フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行う。が, コンピュータで計算する限りは「離散的」



周波数空間での誤差は, 画像全体にひろがる
アーティファクトを生む

スライスは極座標
2次元フーリエ変換は正方座標

コンピュータの能力が低かった時代は精密な計算が難しかった
→さてどうした？