2024年度秋学期

統計学

第14回
分布についての仮説を検証する
― 仮説検定(1)

関西大学総合情報学部
浅野 晃

仮説検定の考え方は，単純

くじのあたり確率

「夏祭り，夜店のくじに当たりなし
　露天商の男を逮捕」
（朝日新聞大阪版2013年7月29日）

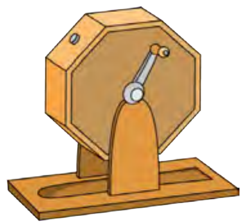
「1万円以上をつぎ込んだ男性が不審に思い、府警に相談。28日に露店を家宅捜索し、当たりがないことを確認した」

半分当たるというくじへの疑問

「半分の確率で当たる」というくじを
10回ひいても，1回も当たらなかった

運が悪いのか？

それとも
「半分の確率で当たる」と
いうのがウソか？



https://illpop.com/png_season/dec01_a07.htm

どちらが正しいともいえない。

こう考える

警察みたいに全部のくじを調べられないなら,

仮に, 本当に「確率1/2で当たる」とする

そのとき,
10回ひいて1回も当たらない確率は,
$(1/2)^{10}=1/1024$

こう考える

本当に「確率1/2で当たる」なら,

10回ひいて1回も当たらない確率は1/1024(約0.001)

それでも「確率1/2で当たる」を信じるのは,

確率0.001でしか起きないことが,
いま目の前で起きていると信じるのと同じ

こう考える

確率0.001でしか起きないことが,
いま目の前で起きていると信じる

そりゃちょっと無理がありませんか？

というわけで,
「確率1/2で当たる」はウソ, と考えるほうが自然

これが[仮説検定]

復習:t分布と区間推定

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
（受験者全体）

母平均 μ

正規分布
と仮定する

標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をとりだす
サイズ n

標本平均 $\bar{X}$

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわかっているものとする（説明の都合です）

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X}$

標本平均は，やはり正規分布にしたがうが，分散が $1/n$ になる
[性質2]　　正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$

正規分布の[性質1]により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

は標準正規分布にしたがう
$N(0,1)$

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
（受験者全体）

母平均 μ

正規分布
と仮定する

標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をとりだす
サイズ n

標本平均 $\bar{X}$

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわからないので，　不偏分散 s^2 で代用

t分布

t統計量　$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$　は

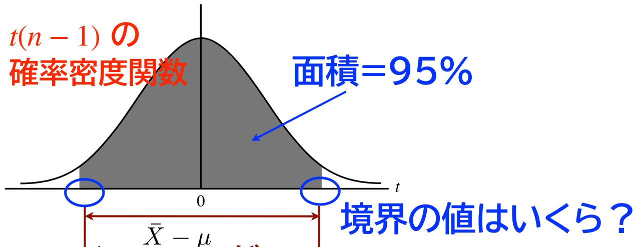
自由度 $(n-1)$ の t分布にしたがう
$t(n-1)$

（「スチューデントのt分布」という）
発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度 $(n-1)$ の t分布にしたがう

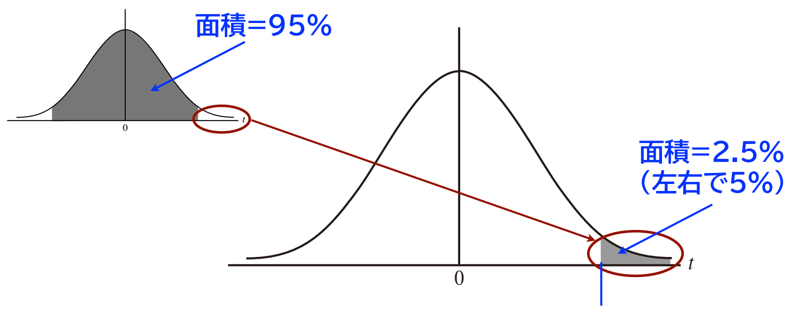
$t(n-1)$



$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%とすると

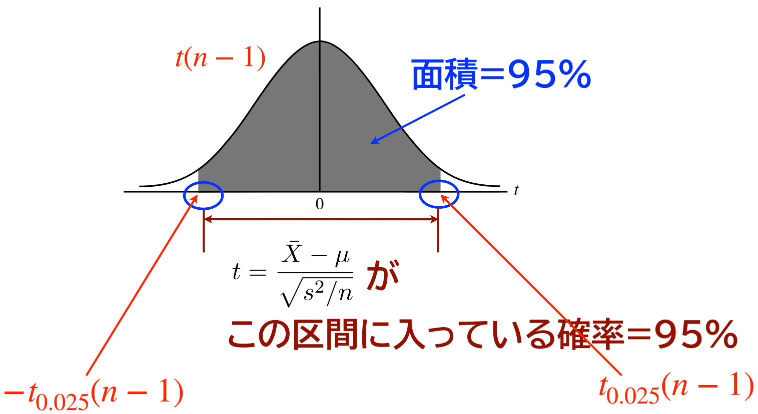
t分布を用いた区間推定



境界の値は自由度によってちがうので

$t_{0.025}(n-1)$ としておく ［上側2.5%点］

t分布を用いた区間推定



t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$

の間に入っている確率が95%

式で書くと $P\left(-t_{0.025}(n-1) \leqq \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$

μ の式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

前回のテキストの例題

$t_{0.025}(10-1) = 2.262$

標本平均=50　不偏分散=25　標本サイズ=10

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

μ の95% 信頼区間の下限

μ の95% 信頼区間の上限

で，信頼区間を求めるのは，今日の本題ではありません。

t分布と検定

t分布と検定：例題

10人の実験協力者に，
薬Aを与えた場合と薬Bを与えた場合とで，それぞれある検査を行うと，
その結果の数値は次の表の通りとなりました。
このとき，

薬Bは，薬Aよりも，検査の数値を高くする働きがあるといえるでしょうか？

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66

t分布と検定：例題

問題は，
それぞれの実験協力者について，
薬Aと薬Bで数値がどう変化しているか。

各実験協力者について，
（薬Bでの数値）－（薬Aでの数値）を求める

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	−2	−2	5	3	−2	2	3	3	6

t分布と検定：例題

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	−2	−2	5	3	−2	2	3	3	6

薬Bでの数値のほうが高い（＋）
薬Aでの数値のほうが高い（−）
どちらの実験協力者もいる

差の平均値について
「薬Bでの数値のほうが高い」か？

「本質的な差」

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	−2	−2	5	3	−2	2	3	3	6

10人の実験協力者について，差の平均値は +2
薬Bでの数値のほうが高い

その差は，
偶然生じたものではなく
「本質的な」差なのか？

「本質的」とは？
仮に全人類が薬を飲んだとしても
薬Bでの数値のほうが高い

検定で考える

1.
母集団（ここでは，世界のすべての患者）については

「薬Aと薬Bでの差」の平均は0

と仮説を設定する。

つまり，「本質的な差はない」という仮説を設定する。

検定で考える

1.「母集団（ここでは，世界のすべての患者）については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり，「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2.
実験協力者は，母集団から無作為抽出された，
10人からなる標本と考える。

検定で考える

1.「母集団(ここでは，世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり，「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は，母集団から無作為抽出された，10人からなる標本と考える。

3.
実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

検定で考える

1.「母集団(ここでは，世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり，「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は，母集団から無作為抽出された，10人からなる標本と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

4.
実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が，
「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに
偶然生じる確率を求める。

検定で考える

1.「母集団(ここでは，世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり，「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は，母集団から無作為抽出された，10人からなる標本と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

4. 実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が，
「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに
偶然生じる確率を求める。

5.その確率が小さければ，
「こんな差が偶然生じるとは思わない」と考える。
すなわち，「本質的な差はない」という当初の仮説は誤り
と結論する。

検定で考える

1.「母集団(ここでは，世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり，「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は，母集団から無作為抽出された，10人からなる標本と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

4. 実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が，
「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに
偶然生じる確率を求める。

5.その確率が小さければ，「こんな差が偶然生じるとは思わない」と考える。
すなわち，「本質的な差はない」という当初の仮説は誤り と結論する。

くじ引き🎯の例でいえば？

本当に半分当たると考える

くじを10回引いたら全部はずれ

10回全部はずれる確率は約0.001

確率がとても小さいので，「半分当たる」は間違いと考える

この論理を仮説検定(検定)という

例題に検定で答える

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	−2	−2	5	3	−2	2	3	3	6

薬Bでの数値のほうが
「本質的に」高いか？

母集団全体での「薬Aと薬Bでの差」は，平均 μ の正規分布にしたがうと考える

標本サイズを n（例題では10）
標本平均を $\bar{X}$（例題では，10人の実験協力者における差の平均値で，+2）
不偏分散を s^2（例題では，10人の実験協力者についての不偏分散で，8.89）

t統計量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ は，自由度（n−1）のt分布にしたがう

例題に検定で答える

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	−2	−2	5	3	−2	2	3	3	6

薬Bでの数値のほうが
「本質的に」高いか？

標本サイズを n（例題では10）
標本平均を $\bar{X}$（例題では，10人の実験協力者における差の平均値で，+2）
不偏分散を s^2（例題では，10人の実験協力者についての不偏分散で，8.89）

t統計量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ は，自由度（n−1）のt分布にしたがう

「母集団については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」という仮説

→ $\mu = 0$

例題に検定で答える

標本サイズを n（例題では10）
標本平均を $\bar{X}$（例題では，10人の実験協力者における差の平均値で，+2）
不偏分散を S^2（例題では，10人の実験協力者についての不偏分散で，8.89）

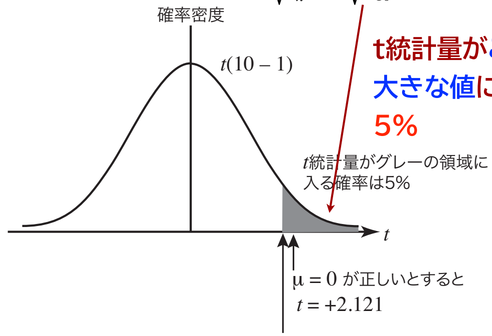
仮説より，$\mu = 0$

このとき，t統計量は

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$$

t統計量＝ +2.121 の意味

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
$\mu = 0$



t統計量がこんなに
大きな値になる確率は
5%

自由度（10-1）のt分布の上側5%点 $t_{0.05}(10-1) = +1.8331$

仮説は間違っている，と考える

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2-0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
$\mu = 0$

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

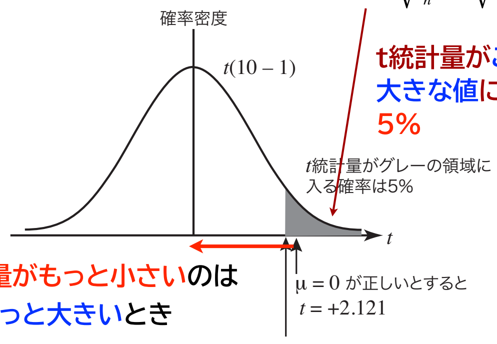
そんな小さな確率でしか起きないはずのことが
起きているのは不自然

仮説が間違っていると考える

🎯
10回全部外れる確率は約0.001
そんな確率でしか起きないはずの
ことが起きているのは不自然

では，どういう結論なら

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2-0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
$\mu = 0$



t統計量がこんなに
大きな値になる確率は
5%

t統計量がもっと小さいのは
μがもっと大きいとき

それなら起きる確率は5%より大きい $t_{0.05}(10-1) = +1.8331$

仮説は間違っている，と考える

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2-0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
$\mu = 0$

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%
仮説が間違っていると考える

本当は，μはもっと大きいと考える
$\mu > 0$

薬Bでの数値のほうが高い，と考える

検定の言葉💬

検定の言葉

［帰無仮説］ H_0: $\mu = 0$

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

$\mu = 0$

［有意水準］

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

仮説が間違っていると考える　帰無仮説を［棄却］する

［対立仮説］ H_1: $\mu > 0$　対立仮説を［採択］する

本当は，μはもっと大きいと考える

$\mu > 0$

偶然とは思わない

［有意］である

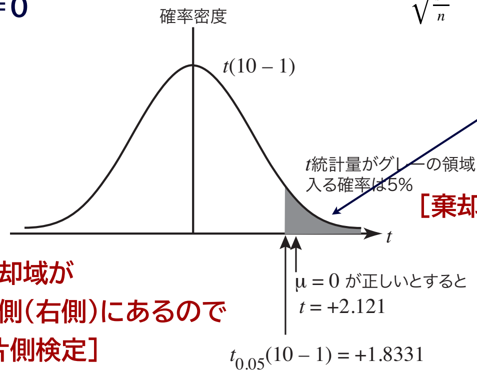
薬Bでの数値のほうが高い，と考える

検定の言葉

［検定統計量］

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

$\mu = 0$



t統計量がこんなに
大きな値になる確率は
5% ［棄却域に落ちる］

［棄却域］

棄却域が
片側（右側）にあるので
［片側検定］