

2024年度秋学期

統計学

第15回

分布についての仮説を検証する

— 仮説検定(2)



関西大学総合情報学部
浅野 晃

t分布と検定(復習)

t分布と検定:例題

10人の実験協力者に、
薬Aを与えた場合と薬Bを与えた場合とで、それぞれある検査を行うと、
その結果の数値は次の表の通りとなりました。

このとき、

薬Bは、薬Aよりも、検査の数値を高くする働きがあるといえるでしょうか？

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |

t分布と検定:例題

問題は、

それぞれの実験協力者について、
薬Aと薬Bで数値がどう変化しているか。

各実験協力者について、
(薬Bでの数値)-(薬Aでの数値)を求める

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | -2 | -2 | 5 | 3 | -2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

t分布と検定:例題

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | -2 | -2 | 5 | 3 | -2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

薬Bでの数値のほうが高い(+)
薬Aでの数値のほうが高い(-)
どちらの実験協力者もいる

差の平均値について
「薬Bでの数値のほうが高い」か？

「本質的な差」

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | -2 | -2 | 5 | 3 | -2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

10人の実験協力者について、差の平均値は +2
薬Bでの数値のほうが高い

その差は、
偶然生じたものではなく
「本質的な」差なのか？

「本質的」とは？

仮に全人類が薬を飲んだとして
薬Bでの数値のほうが高い

検定で考える

- 「母集団(ここでは、世界のすべての患者)については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり、「本質的な差はない」という仮説を設定する。
- 実験協力者は、母集団から無作為抽出された、10人からなる標本と考える。
- 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。
- 実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が、「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに偶然生じる確率を求める。
- その確率が小さければ、「こんな差が偶然生じるとは思わない」と考える。
すなわち、「本質的な差はない」という当初の仮説は誤りと結論する。

この論理を仮説検定(検定)という

くじ引き🎲の例で
いえば？

本当に半分当たると
考える

くじを10回引いたら
全部はずれ

10回全部はずれる
確率は約0.001

確率がとても小さい
ので、「半分当たる」
は間違いと考える

例題に検定で答える

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | -2 | -2 | 5 | 3 | -2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

薬Bでの数値のほうが
「本質的に」高いか？

母集団全体での「薬Aと薬Bでの差」は、平均 μ の正規分布にしたがうと考える

標本サイズを n (例題では10)

標本平均を \bar{X} (例題では、10人の実験協力者における差の平均値で、+2)

不偏分散を s^2 (例題では、10人の実験協力者についての不偏分散で、8.89)

t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ は、自由度 $(n - 1)$ のt分布にしたがう

例題に検定で答える

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | -2 | -2 | 5 | 3 | -2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

薬Bでの数値のほうが
「本質的に」高いか？

標本サイズを n (例題では10)

標本平均を \bar{X} (例題では, 10人の実験協力者における差の平均値で, +2)

不偏分散を s^2 (例題では, 10人の実験協力者についての不偏分散で, 8.89)

t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ は, 自由度 $(n - 1)$ のt分布にしたがう

「母集団については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」という仮説
→ $\mu = 0$

例題に検定で答える

標本サイズを n (例題では10)

標本平均を \bar{X} (例題では, 10人の実験協力者における差の平均値で, +2)

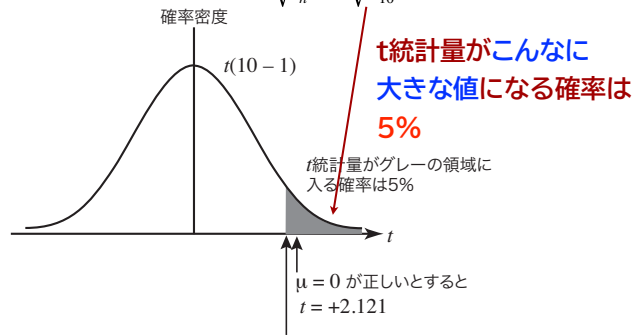
不偏分散を s^2 (例題では, 10人の実験協力者についての不偏分散で, 8.89)

仮説より, $\mu = 0$

このとき, t統計量は $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

t統計量 = +2.121 の意味

仮説が正しいとすると, t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$



自由度(10-1)のt分布の上側5%点 $t_{0.05}(10-1) = +1.8331$

仮説は間違っている, と考える

仮説が正しいとすると, t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

そんな小さな確率でしか起きないはずのことが
起きているのは不自然

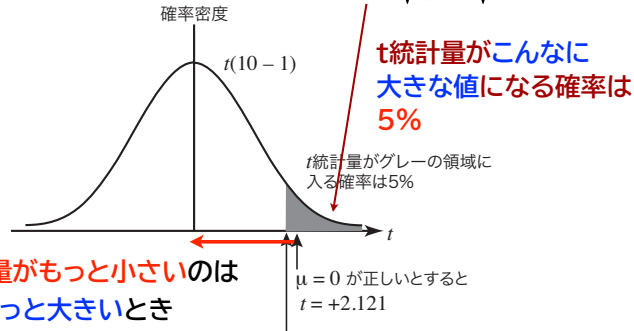
仮説が間違っていると考える



10回全部外れる確率は約0.001
そんな確率でしか起きないはずの
ことが起きているのは不自然

では、どういう結論なら

仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$



それなら起きる確率は5%より大きい $t_{0.05}(10-1) = +1.8331$

仮説は間違っている、と考える

仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%
 仮説が間違っていると考える

本当は、 μ はもっと大きいと考える
 $\mu > 0$

薬Bでの数値のほうが高い、と考える

検定の言葉

[帰無仮説] $H_0: \mu = 0$
 仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$ [有意水準]

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%
 仮説が間違っていると考える 帰無仮説を[棄却]する

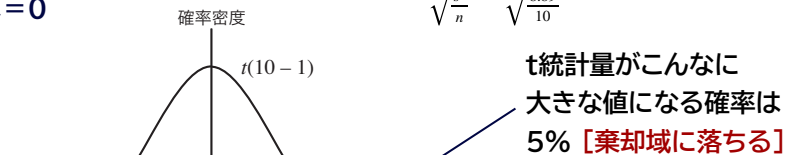
[対立仮説] $H_1: \mu > 0$ 対立仮説を[採択]する
 本当は、 μ はもっと大きいと考える
 $\mu > 0$

偶然とは思わない
 [有意]である

薬Bでの数値のほうが高い、と考える

検定の言葉

[検定統計量]
 仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$



棄却域が片側(右側)にあるので [片側検定]
 $t_{0.05}(10-1) = +1.8331$

両側検定

例題を少し変更

10人の実験協力者に、
薬Aを与えた場合と薬Bを与えた場合とで、それぞれある検査を行うと、
その結果の数値は次の表の通りとなりました。このとき、

~~薬Bは、薬Aよりも、検査の数値を高くする働きがあると~~
~~いえるでしょうか。~~

薬Aと薬Bで、検査の数値に違いがあるといえるでしょうか。

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |

前の例題とどう違うのか

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | -2 | -2 | 5 | 3 | -2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

薬Bは、薬Aよりも、検査の数値を高くする働きがあるといえるでしょうか。

差の平均値について「薬Bでの数値のほうが高い」か？

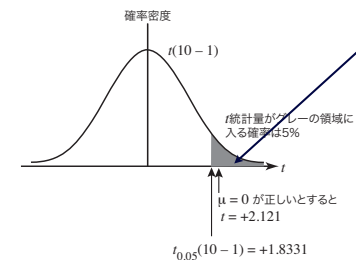
薬Aと薬Bで、検査の数値に違いがあるといえるでしょうか。

どちらの数値が高いにしても、本質的に差があるか？

前の場合は

薬Bは、薬Aよりも、検査の数値を高くする働きがあるといえるか？
差の平均値について「薬Bでの数値のほうが高い」か？

仮説が正しいとすると、t統計量を計算して
 $\mu = 0$



t統計量がここにきたら

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

それは不自然なので
帰無仮説を棄却する

こんどの場合, 対立仮説は

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | -2 | -2 | 5 | 3 | -2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

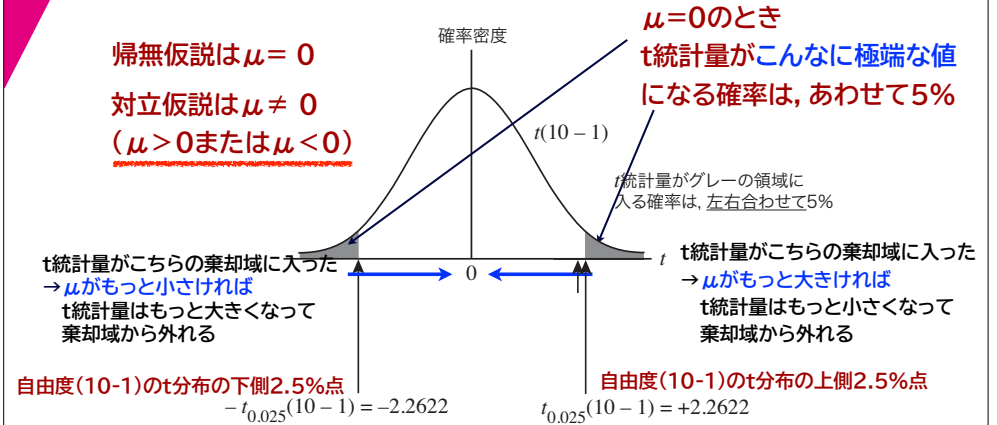
薬Aと薬Bで, 検査の数値に違いがあるといえるか?
 どちらの数値が高いにしても, 本質的に差があるか?

本質的に差がある, ということは,
 薬Bのほうが数値が高い場合($\mu > 0$)も,
 薬Aのほうが高い場合も($\mu < 0$)も, どちらも含む

対立仮説は, $\mu \neq 0$

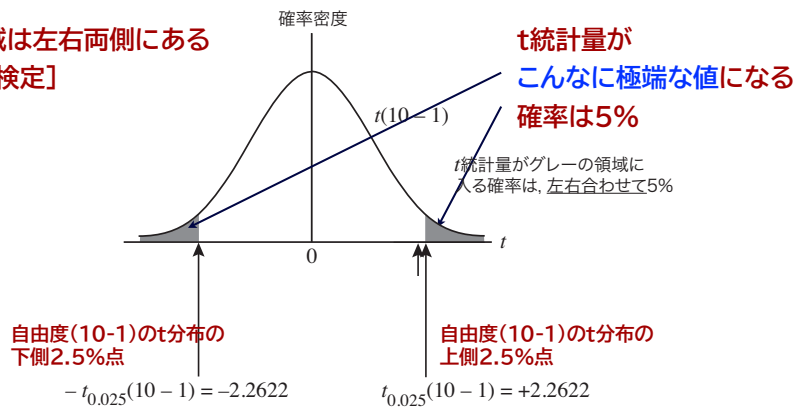
この場合, 棄却域と対立仮説は

帰無仮説は $\mu = 0$
 対立仮説は $\mu \neq 0$
 ($\mu > 0$ または $\mu < 0$)



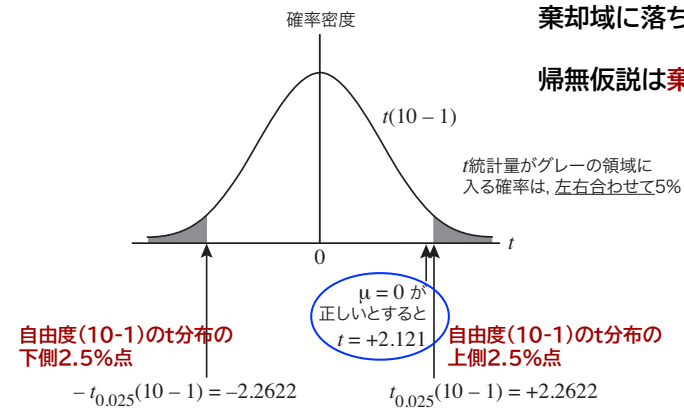
この場合, 棄却域は

棄却域は左右両側にある
 [両側検定]



例題では

棄却域に落ちない
 帰無仮説は棄却されない



棄却されないときは

仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$

t統計量がこんなに極端な値になる確率は5%
とはいえない

本当は、 μ は0ではないとはいえない

薬Bでの数値と薬Aでの数値に本質的な違いがある、
とはいえない

棄却されないときは

帰無仮説が棄却されるのは？

帰無仮説が正しいとすると、
とても小さな確率でしか起きないはずのことが、
いま起きていることになるから。

帰無仮説が棄却されないときは？

「いま起きていることがおきる確率はとても小さい、
とまではいえない」

棄却されないときは

帰無仮説が棄却されないときは

「いま起きていることがおきる確率は
とても小さい、とまではいえない」

だから

「帰無仮説が棄却されない」とは、

~~帰無仮説が正しい~~

帰無仮説が間違っているとはいいきれない

有意水準について

有意水準があらわすもの

有意水準は物言いの慎重さを表す

有意水準が

大きい(5%) 確率5%でおきることでも
「こんなことがおきるのは偶然とは思えない」
として棄却 **大胆だが, 蛮勇**

小さい(1%) 確率1%より大きいことなら
「偶然でないと言い切れない」
として棄却しない **慎重だが, 臆病**

なんかおかしくない? 🤔

なんかおかしくない?

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | -2 | -2 | 5 | 3 | -2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

薬Bは, 薬Aよりも, 検査の数値を高くする
働きがあるといえるでしょうか。 **片側検定**

「薬Bでの数値のほうが高い」といえる

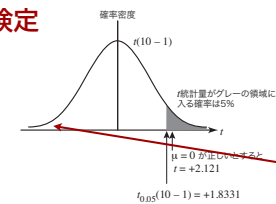
薬Aと薬Bで, 検査の数値に違いが
あるといえるでしょうか。 **両側検定**

「本質的な差がある」とはいえない

同じデータ
同じ有意水準(5%)
なのに???

2つの検定は, 調べているものが違う

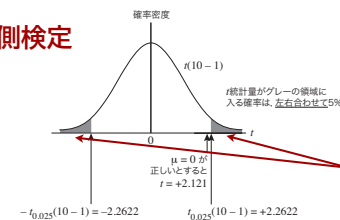
片側検定



薬Bは薬Aよりも,
検査の数値を高くする働きが
あるだろう, という**目論見がある**

標本を調べると逆の結果に
なっていたとしても, **見逃す**

両側検定



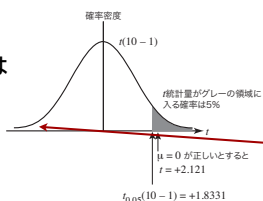
薬Aと薬Bのどちらの数値が
高いかという**目論見はない**

どちらが高い場合でも棄却

実はおかしくない

片側検定

さきほどの例では
棄却



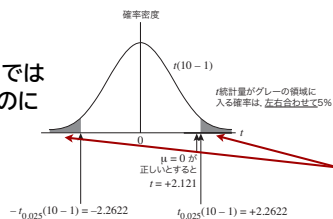
薬Bは薬Aよりも、
検査の数値を高くする働きが
あるだろう、という目論見がある

標本を調べると逆の結果に
なっていたとしても、見逃す

ある程度目論見があるから、
大胆にばっさり棄却

両側検定

さきほどの例では
同じデータなのに
棄却されない



薬Aと薬Bのどちらの数値が
高いかという目論見はない

どちらが高い場合でも棄却
同じ有意水準でも慎重な物言い

くじびきの例でいうと

帰無仮説:「当たり確率は50%である」

くじをひく立場なら

10回中1回も当たらなかつたら

→ 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率は小さいし、
しかも結果に不満だから棄却したい

10回中10回当たったら

→ 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率はやはり小さいが、
結果に不満はないから棄却しない

片側検定

くじびきの例でいうと

帰無仮説:「当たり確率は50%である」

賞品を出す立場なら

10回中1回も当たらなかつたら

→ 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率は小さいが、
とくに損はしないから棄却しない

10回中10回当たったら

→ 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率はやはり小さい
それでは破産してしまうので棄却したい

やはり
片側検定

くじびきの例でいうと

帰無仮説:「当たり確率は50%である」

中立の立場(商店会長?)なら

10回中1回も当たらなかつたときも

10回中10回当たったときも

→ 帰無仮説が正しいとすると、
そんなことが起きる確率はどちらも小さいし、
どちらにしても信用にかかわるので棄却したい

これが
両側検定

どの検定を用いるかは、
「立場」にもとづいて先に決めておかなければならない

検定は どんなときにするものなのか💡

有意水準と第1種の誤り

有意水準5%のときは

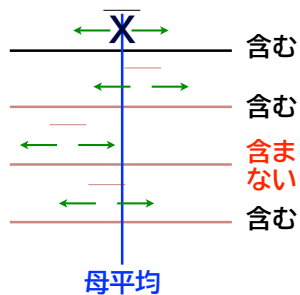
確率5%でしかおきないことがおきているなら、
それは偶然ではないと考える

[有意]

でも、確率5%でしかおきないことは、
言い換えれば、確率5%でおきるのでは？

有意水準と第1種の誤り

確率5%でしかおきないことは、確率5%でおきる



区間推定において
偶然標本が偏っていたために、
「95%信頼区間」が
確率5%ではずれるように
帰無仮説が正しくても、
偶然標本が偏っていたために、
棄却してしまう確率が5%

[第1種の誤り] その確率=有意水準

有意水準と第1種の誤り

つまり

帰無仮説が本当に正しいとしても、
有意水準5%の仮説検定を何度も行うと、
そのうちの5%では第1種の誤りを犯す

正しいはずの帰無仮説を棄却し、
採択すべきでない対立仮説を採択してしまう

検定の結論が言っていること

検定で「帰無仮説を棄却する」とは

私は、帰無仮説は間違いだ、と判断する。

ただし

私は100回中5回は誤りを述べる(第1種の誤りを犯す)。

私が今回、本当のことを言っているのか、
誤りを言っているのか、
それは誰にもわからない。

検定はどんなときにするものなのか

何度でも標本をとりだして検定できるようなら、
検定などする必要はない

小さな標本を1回しかとりだせないときに、
それでも十分にいえる結論を導く

何度も検定をすれば、
棄却されないはずの帰無仮説もたまには棄却される

「血液型と性格に関係がない」という帰無仮説も
たまに棄却されることがある

こんな研究も

血液型と性格「関連なし」 心理学研究, 85, 2, pp. 148-156 (2014)
読売新聞 2014.7.19

血液型と性格の関連性に科学的根拠はないとする統計学的な解析結果を、九州大の縄田健悟講師(社会心理学)が発表した。

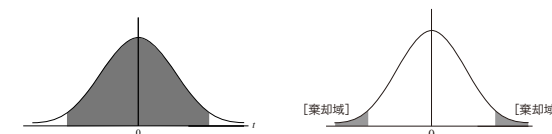
日米の1万人以上を対象にした意識調査のデータを分析した。

質問に対する回答のうち、血液型によって差があったのは3項目だけで、その差もごくわずかだったため「無関連であることを強く示した」と結論づけた。

検定で、標本サイズが大きいと

標本サイズが大きいと 推測がよりはっきりする

区間推定では 信頼区間が狭くなる
検定では 棄却域が広くなる



※今回例に使った「薬の効果」の問題では、実際の研究では、「薬AとBでどのくらいの差(効果量)があれば効果があるといえるか」を考えて、標本サイズを決める

検定で、標本サイズが大きいと

標本サイズが**大きいと**

区間推定では 信頼区間が**狭く**なる
検定では 棄却域が**広く**なる

標本サイズが**非常に大きいと**

帰無仮説が**ちょっとでも疑わしいと棄却**される

それでも「血液型と性格に関係がない」という

帰無仮説が棄却されないなら

「**無関連であることを強く示し**」ている