2024 年度秋学期　統計学

演習（2）

1. 下の記述は，統計学の観点からみて正しいかどうかを答えよ。正しいときは理由を説明せよ。正しくないときは，どういう点がどのように正しくないかを説明せよ。

   母集団の平均の区間推定を行なう問題で，取り出した標本を使って計算した結果，「母平均の 95 パーセント信頼区間は 20 から 30 である」という結論を得た。このとき，母平均が 20 以上 30 以下である確率は 95 パーセントである。

2. X薬品の「Y」という薬は，１つ１グラムの錠剤となっている。いま，10 個の錠剤を無作為抽出し，各々の錠剤に含まれる物質Ｐの量を調べた。その結果，各錠剤の物質Ｐの量（ミリグラム）は次の通りであった。

   1.2　0.8　0.9　0.9　1.0　1.3　1.2　1.0　0.8　0.9

   (a) 講義で説明した知識を使って，「薬Ｙの１グラムあたりに含まれる物質Ｐの量」を区間推定するには，この測定がどのようなものであると仮定できる必要があるか。
   (b) (a) で答えた仮定が正しいとして，信頼係数 95% で (a) の区間推定を行え。

3. ある土砂の汚染の度合を調べるために，対象の土砂をよく混ぜてから１グラムずつ 10 個の土の標本を抽出し，各々汚染物質の量を調べた。その結果，汚染物質の量（ミリグラム）は次の通りであった。

   1.2　0.5　0.3　0.1　1.0　1.3　1.2　1.0　0.1　0.5

   (a) 「この土砂の１グラムあたりの汚染物質の量は，1.1 ミリグラムと言えるか」という質問に，講義で説明した知識を用いて答えるために，必要な仮定を２つあげよ。
   (b) 1. の仮定が正しいとして，有意水準 5%の仮説検定を使って，この質問に答えよ。

解答例

1. 母平均は，調査した人が知らないだけで，標本抽出には関係なく既に決まっている。だから，「20 以上 30 以下」という具体的区間を求めた段階で，母平均が「20 以上 30 以下」であるかどうかはすでに決まっている。「95% 信頼区間」とは，この方法で信頼区間を何度も求めると，そのうち 95% は母平均を本当に含んでいる区間である，という意味であり，「20 以上 30 以下」はそれらの信頼区間のうちのひとつにすぎない。

2. (a) 薬 Y の各錠に含まれる物質 P の割合が，正規分布にしたがっていること。

   (b) 薬 Y 全体での 1 グラムあたりの物質 P の量を μ，抽出された各錠剤での物質 P の量の平均を $\bar{X}$，その不偏分散を s^2，抽出された錠剤の数（標本サイズ）を n とする。このとき，問題文と (a) の仮定から，各錠剤が含む物質 P の量は，平均 μ の正規分布にしたがうと考えられる。したがって，

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \tag{A1}$$

   という値（t 統計量）は自由度 $n-1$ の t 分布 $t(n-1)$ にしたがうので，$t_{0.025}(n-1)$ を $t(n-1)$ の上側 2.5 パーセント点とすると

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95 \tag{A2}$$

   となるので，μ の 95%信頼区間の上限・下限は，(A2) 式のかっこ内の不等式の上限・下限となる。

   $\bar{X} = (1.2 + 0.8 + \cdots + 0.8 + 0.9)/10 = 1.0$，$s^2 = \{(1.2 - 1.0)^2 + \cdots + (0.9 - 1.0)^2\}/(10 - 1) = 0.031$，$n = 10$，$t_{0.025}(9) = 2.262$ であるから，μ の 95%信頼区間は $[0.87, 1.13]$（ミリグラム）となる。となる。

3.

   (a) (1) 標本が無作為抽出されていること，つまり土砂全体からまんべんなく抽出されていること。(2) 母集団，すなわち十分多くの回数測定を行ったとしたときの各測定での汚染物質の割合が，正規分布にしたがっていること。

   (b) 土砂全体での 1 グラムあたりの汚染物質の量を μ，各標本での汚染物質の量の平均を $\bar{X}$ ，不偏分散を s^2，標本サイズを n とする。各測定（各々 1 グラム）が含む汚染物質の量は正規分布にしたがうと仮定しているので，その平均が μ であることから，

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \tag{A3}$$

   という値は，自由度 $n-1$ の t 分布 $t(n-1)$ にしたがう。

   題意から，帰無仮説 $H_0 : \mu = 1.1$，対立仮説 $H_1 : \mu \neq 1.1$ という両側検定を行う。この問題では $n = 10$ だから，t は自由度 9 の t 分布にしたがう。$t_{0.025}(\nu)$ を自由度 ν の t 分布の上側 2.5%点とすると，$P(-t_{0.025}(9) \leq t \leq t_{0.025}(9)) = 0.95$ であるから，「$t \leq -t_{0.025}(9)$ または $t \geq t_{0.025}(9)$ である」確率は 5% となる。したがって，帰無仮説が正しい時この条件が満たされれば帰無仮説を棄却し，対立仮説を採択する。

   この問題では $\mu = 1.1$，$\bar{X} = (1.2 + 0.5 + \cdots + 0.1 + 0.5)/10 = 0.72$,
   $s^2 = (1.2 - 0.72)^2 + \cdots + (0.5 - 0.72)^2/(10 - 1) = 0.222$，$n = 10$ を (A3) 式に代入すると

$t = -2.55$ で，$t \leq -t_{0.025}(9) = -2.262$ を満たすので，帰無仮説 H_0 を棄却し，対立仮説 H_1 を採択する。したがって，問題の質問に対する統計学的回答は「有意水準 5% で，1.1 ミリグラムではないと言える」となる。