2024年度春学期

応用数学(解析)

第1部・「無限」の理解 ／

第3回
実数とは何か

関西大学総合情報学部
浅野 晃

拡張されていく「数」🤔

拡張されていく「数」

実数

…, -3, -2, -1, 0,　1, 2, 3, …
整数　自然数

…, 2/3, 1/2, 1/3, …　有限小数と循環する無限小数

有理数

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$
π, e　循環しない無限小数

無理数

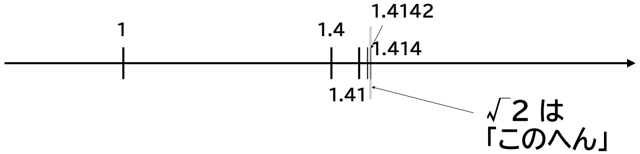
今日扱うのは「実数の連続性を示す方法」

いくつか挙げますが, どれも等価です

無限小数とカントールの公理🤔

点と区間

「循環しない無限小数」は，
数直線上の一つの「点」なのか？

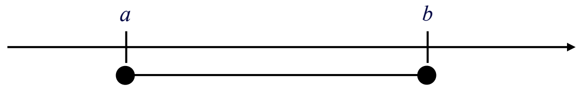


$\sqrt{2}$ は本当に「点」か？ よくわからない…

点ではなく[区間]で考える

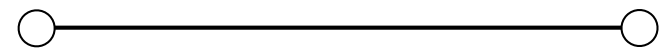
閉区間と開区間

$a < b$ のとき，a と b の間にある数の集合→[区間]



両端を含む [閉区間]$[a, b]$

最小値はa，最大値はb



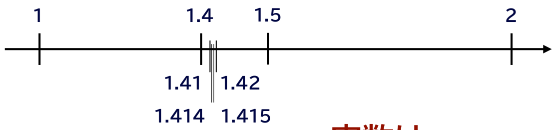
両端を含まない [開区間](a, b)

最小値・最大値が存在するかどうかは，数の種類による

カントールの公理

循環しない無限小数 $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$

無限に桁数を増やすと，ひとつの実数を表せるのか？



$[1, 2]$

$[1.4, 1.5]$

$[1.41, 1.42]$

$[1.414, 1.415]$

$\vdots$

実数は，
「入れ子」の閉区間の極限で定義する

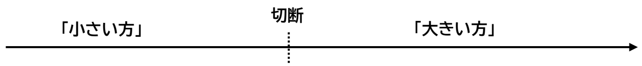
その極限が，$\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$であるとする

実数とデデキントの切断✂️

デデキントの切断

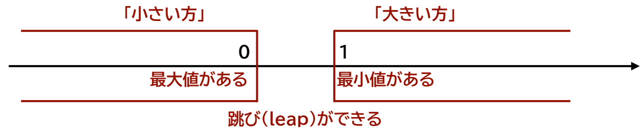
**数直線をある場所で切断し，
数の集合を「大きい方」と「小さい方」に分ける**

（ある集合の）すべての数を，
一方の組のどの数も
もう一方の組のどの数よりも小さくなるように，
2つの組に分ける



整数の切断

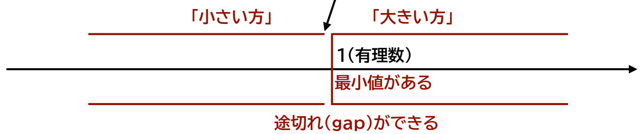
整数の場合



有理数の切断

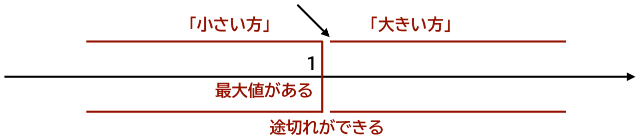
有理数の場合

「小さい方」の最大値がない
1よりも小さく
1にいくらでも近い有理数が存在する



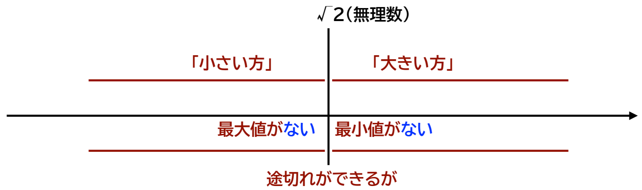
［稠密性］

「大きい方」の最小値がない
1よりも大きく
1にいくらでも近い有理数が存在する



有理数の切断

有理数の場合こういう場合もある



√2よりも小さく
√2にいくらでも近い有理数も

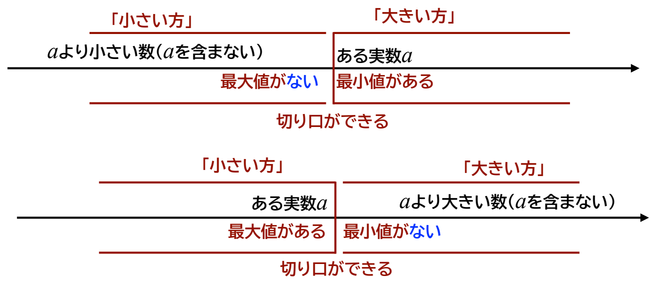
√2よりも大きく
√2にいくらでも近い有理数も

どちらも存在する

「稠密」とは，
いくらでも細かく「びっしり」と
毛の植わっているブラシのようなもの

実数の切断

実数は，必ず下のどちらかになる　　稠密な上に[連続性]



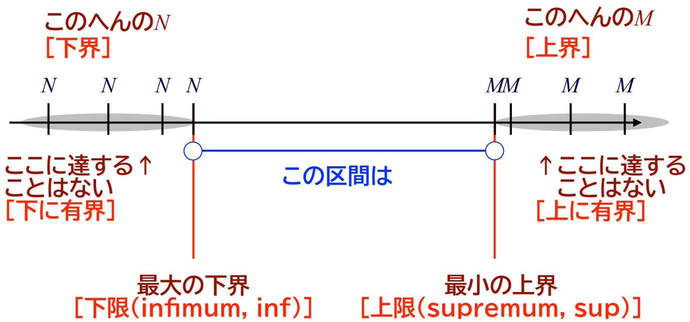
実数とは，「切断の切り口」である

「連続」とは，「べったり」と塗り付けられた塗料のようなもの

上限と下限
ワイエルシュトラスの定理🤔

有界，上界・下界，上限・下限

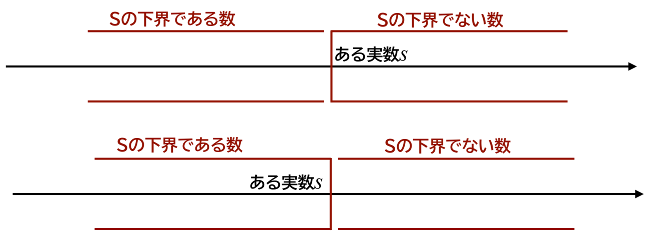
開区間には最大値も最小値もないが，
上にも下にも限界はある



ワイエルシュトラスの定理

実数からなる集合が下(上)に有界ならば
必ず下限(上限)が存在する　　デデキントの切断から導ける

実数からなるある集合Sが，下に有界とすると，

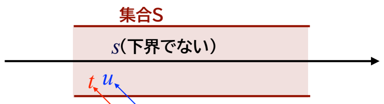


どちらかの切断を形成し，実数sが定まる。
下の切断なら，下限(最大の下界)が存在する。上の切断にならないことを示す

ワイエルシュトラスの定理

こちらの切断だとすると

実数 s は, 集合Sの下界でない数だから, 集合Sを見ると



s より小さな数 t が, 集合Sに属しているはず

s と t の間にある数 u も, 集合Sに属しているはず

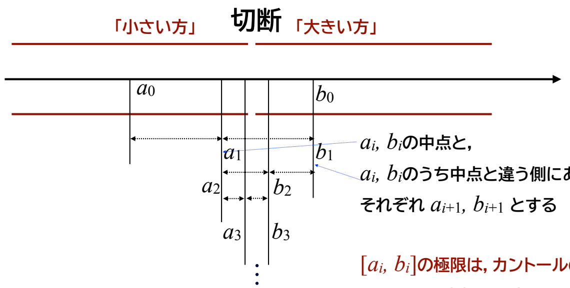
u は t より大きいから, u は「集合Sの下界ではない数」である
s は u より大きい。

これは, 「s は 集合Sの下界ではない数のうちで最小」に矛盾　つまり, 「こちらの切断ではない」

実数を定義する
各公理・定理間の関係🤔

カントールの公理とデデキントの切断

カントールの公理によって定まる実数は,
デデキントの切断によって切り口に現れる実数と同じか？

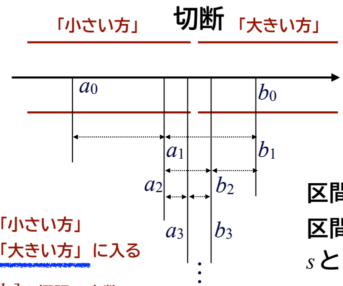


a_i, b_iの中点と,
a_i, b_iのうち中点と違う側にある点を,
それぞれ a_{i+1}, b_{i+1} とする

$[a_i, b_i]$の極限は, カントールの公理により, 1つの実数 s を定める

この s は, デデキントの切断による「切り口」にあるか？

カントールの公理とデデキントの切断



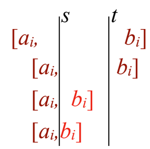
実数 s が「小さい方」に属するとする

s より大きい数 t については
どんなに t が s に近くても

a_i は「小さい方」
b_i は「大きい方」 に入る

$[a_i, b_i]$の極限＝実数 s

区間$[a_i, b_i]$がs に到達する途中で
区間の右端(「大きい方」)が
s と t の間に入るときがあるはず



t は「大きい方」に属する

s は「小さい方」の最大値である
「大きい方」に最小値はない
→ s は切断の切り口で, 「小さい方」にある

実数の連続性を示すさまざまな公理

カントールの公理　実数は入れ子の閉区間の極限

デデキントの切断による公理　実数は切断の「切り口」

ワイエルシュトラスの定理
実数の集合が有界ならば，上限か下限がある

実数の有界な単調数列は収束する　（これは次回）

いずれも同値である

連続性裁判

～こんな数学，何か役に立つの？～🤔

連続性裁判

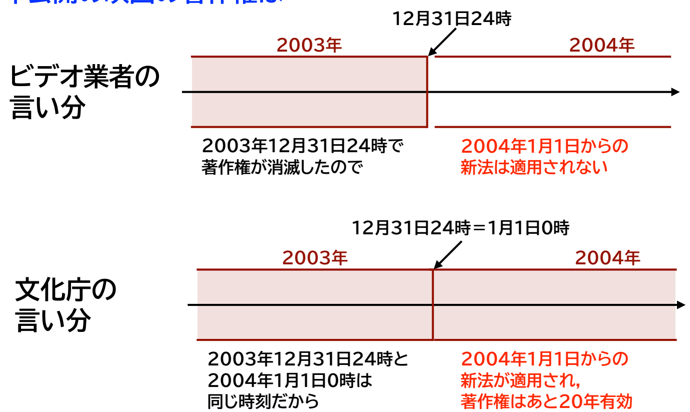
映画の著作権

公開から50年後の年の年末まで有効
→2004年1月1日から「70年」に延長

1953年公開の映画の著作権は
50年後の2003年末で消滅？

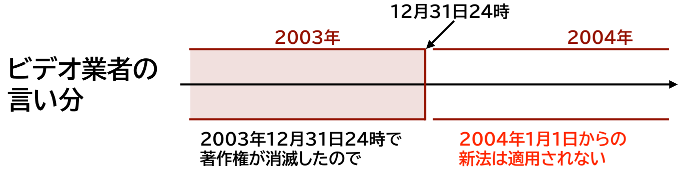
連続性裁判

1953年公開の映画の著作権は



裁判の結果は

「2003年12月31日24時」と「2004年1月1日0時」の
2つの名前が同じ時刻をさすことはない



こちらが認められた。

「時の流れは連続」

問題🌀

問題の解説

相異なる2つの有理数の間には必ず無理数があること
を証明してください。

有理数 a, b の間には有理数しかないと仮定する🤔

m を無理数とすると，

a, b は有理数なので，$\dfrac{m-a}{b-a}$ も無理数

$n-1 < \dfrac{m-a}{b-a} < n$ となる 整数 n が存在する

（ $\dfrac{m-a}{b-a}$ の整数部分が $n-1$ ）

問題の解説

$n-1 < \dfrac{m-a}{b-a} < n$ となる 整数 n が存在する

$a < m - (n-1)(b-a)$　　$m - a < n(b-a)$

$m + (n-1)a < nb$

$m + (n-1)a - (n-1)b < b$

$m - (n-1)(b-a) < b$

$a < m - (n-1)(b-a) < b$

無　整　有　有

無理数

有理数 a, b の間には有理数しかない
という仮定に矛盾する🌀

今日のまとめ

実数の「連続性」

実数の連続性を示す方法

- カントールの公理
- デデキントの切断による公理
- ワイエルシュトラスの定理