2024 年度春学期　応用数学（解析）　第５回

第２部・基本的な微分方程式／　微分方程式とは・変数分離形

微分方程式とは

第２部・第３部では，微分方程式を扱います。微分方程式とは，未知の関数とその微分（導関数）との関係で表された方程式で，その解は数ではなく関数です。例えば，x が t の関数 $x(t)$ であるとき，その１階および２階導関数を x', x'' で表すと，$x' = x$ や $x' - 5x + 3t = 0$，$x'' - 5x' + 6x = 0$ などは微分方程式です。１階導関数，２階導関数，... に関する微分方程式を１階微分方程式，２階微分方程式，... といいます。また，１変数関数の微分方程式を常微分方程式，２変数以上の関数の偏微分に関する方程式を偏微分方程式といいます。

注意しなければならないのは，**微分方程式は特別な形のものしか解けない**ことです。そこで，さまざまな形の微分方程式に対する解法が研究されている一方で，方程式を解かずに解の挙動（$t \to \infty$ のときどうなるか，など）を知る「定性的理論」という研究があります。この講義では，解ける方程式とその解法を，簡単なものについて順に説明していきます。

微分方程式の例

微分方程式は，対象としている量がある条件の下で変化するとき，その量と条件の関係を記したものです。微分方程式を解くとは，その条件下で，対象としている量がどのように変化するかを知ることです。このような問題は，物理学において現れてきたものです。

例えば，力 F，物体の質量 m，物体の加速度 a の間にニュートンの運動方程式 $F = ma$ が成り立つことが知られています。加速度は速度の微分で，速度は位置の微分ですから，時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とすると，運動方程式は $F = mx''$ という微分方程式です。この方程式を解いて $x(t)$ を求めると，ある時刻における物体の位置が求まります。

さらに，運動方程式を物体の落下の問題にあてはめてみます。物体が空気中を落下するとき，物体は下向きの重力と，上向きの空気抵抗力を受けます。重力は重力加速度を g とすると mg で表されます。また，空気抵抗力は速度の２乗に比例することが知られており，これは k を正の定数とすると $-k(x')^2$ と表されますから，運動方程式は $mg - k(x')^2 = mx''$ となります。

また，放射性物質の崩壊においては，「崩壊の速度が，現在存在する物質の量に比例する」ことが知られています。そこで，時刻 t での物質の量を $x(t)$ とすると，k を正の定数として，$x(t)$ は微分方程式 $x' = -kx$ を満たします[1]。

一般解と特殊解

放射性物質の崩壊に関する上の方程式 $x' = -kx$ において，定数 k が具体的に与えられたとします。このとき，$x(t)$ はひとつの関数に決まるかというと，そうではありません。なぜならば，$x(t)$ は時刻 t での物質の量ですから，それは「最初に物質がどれだけあったか」すなわち $x(0)$ がわからないと決まらないからです。この $x(0)$ を**初期値**といい，初期値が定まった時に求められる解を**特殊解 (particular solution)**，初期値に関するパラメータを持ち，さまざまな初期値に応じて特殊解を求めることができる形の解を**一般解 (general solution)** といいます[2]。

[1] 第１０回でくわしく説明します。
[2] 初期値だけでなく，終端での条件も与えられる場合もあります。これを**境界値問題**といいます。

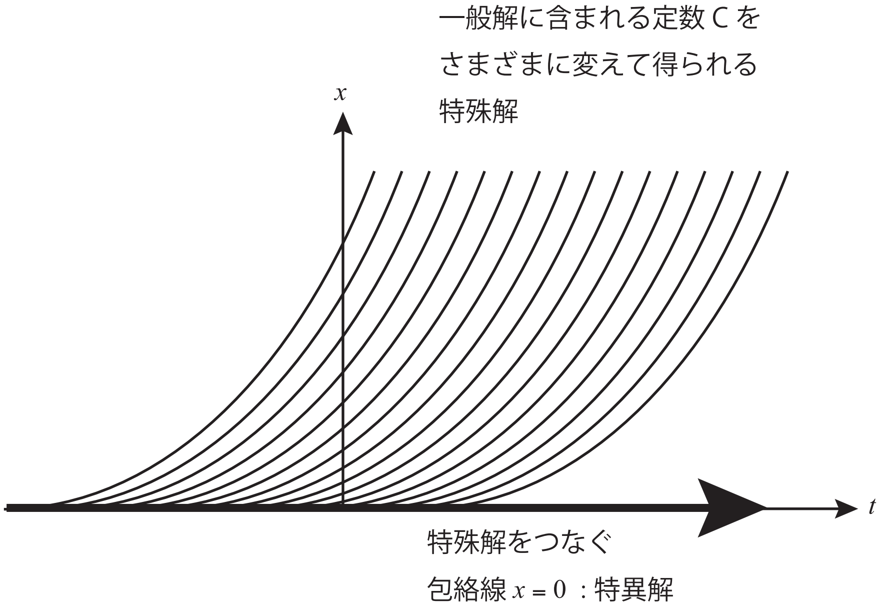

図 1: 微分方程式 $x' = x^{\frac{1}{3}}$ の特殊解と特異解

解の一意性

関数 $x(t)$ に関する微分方程式 $x' = x^{\frac{1}{3}}$ を考えます。$x = \{\frac{2}{3}(t+C)\}^{\frac{3}{2}}$（$C$ は定数）はこの方程式の一般解です（方程式に代入して確かめてみてください）。一方，$x \equiv 0$ も明らかに解ですが，この解は上の一般解で定数 C をどう変えても出てきません。このように一般解からは出てこない解を，**特異解 (singular solution)** といいます。

初期値がひとつ定まったときに解がひとつだけに定まることを，解が**一意 (unique)** であるといいます。上の例では，初期値が $x(0) = 0$ のとき，一般解からは $C = 0$ で $x = (\frac{2}{3}t)^{\frac{3}{2}}$ が得られ，一方特異解 $x \equiv 0$ もこの初期値を満たしますから，解が一意ではありません。

微分方程式の解が一意である（十分）条件としてよく知られているものに，Lipschitz（リプシッツ）条件というものがあります。これは，微分方程式が $x'(t) = f(t,x)$ の形で表されるときに，$f(t,x)$ をあらためて t,x の関数と考えたとき，初期値のまわりでどんな x_1, x_2 に対しても

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqq L|x_1 - x_2| \tag{1}$$

となる定数 L が存在するならば，この微分方程式のその初期値を満たす解は一意に定まる，というものです（証明の概略は付録 1）。(1) 式は，関数 $f(t,x)$ が x のわずかな変化に対していくらでも急峻に変化するということはない，という条件を表しています。

さきほどの例の微分方程式 $x' = x^{\frac{1}{3}}$ では，$f(t,x) = x^{\frac{1}{3}}$ です。この関数は $x = 0$ で微分不可能で，$x = 0$ に近づくと傾きがいくらでも大きくなります。したがって，$x = 0$ に近づけば近づくほど，x のわずかな変化に対して $f(t,x)$ の変化はいくらでも大きくなり，Lipschitz 条件を満たしていません[3]。

---

[3] Lipschitz 条件は解が一意であるための十分条件ですから，Lipschitz 条件を満たさないからといって解が一意でないとは，必ずしもいえません。

変数分離形

もっとも簡単な微分方程式として，上で述べた核崩壊に関する方程式 $x' = -kx$ を考えてみましょう。この方程式は，

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{2}$$

と書くことができます。この方程式を，$x \neq 0$ として

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -k \tag{3}$$

と変形し，両辺を t で積分すると，

$$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int (-k)dt \tag{4}$$

となりますが，左辺は置換積分を使うことで

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (-k)dt \tag{5}$$

と表されます。このことから，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}dx &= -\int kdt \\ \log|x| + C_1 &= -kt + C_2 \\ \log|x| &= -kt + (C_2 - C_1) \\ x &= \pm\exp\{-kt + (C_2 - C_1)\} \\ x &= \pm\exp(C_2 - C_1)\exp(-kt)\end{aligned} \tag{6}$$

となります。C_1, C_2 は積分定数です。そこで，$\pm\exp(C_2 - C_1)$ をあらためて定数 C とおくと，この方程式の一般解は $x(t) = C\exp(-kt)$ となります。この計算では $x \neq 0$ としましたが，一方 $x \equiv 0$ も元の方程式に代入すると解であることがわかります。この解は一般解で $C = 0$ とすると表すことができるので，これも 1 つの特殊解です。ここで，初期値 $x(0) = x_0$ であるならば，$x_0 = C\exp(0)$ となるので，この時の特殊解は $x(t) = x_0\exp(-kt)$ となります。

ところで，このような導出の過程を，通常は (2) 式から

$$\frac{dx}{x} = -kdt \tag{7}$$

とあたかも分数の計算のように変形し，ここから (5) 式を導きます。この式では，左辺に x，右辺に t と変数が分離しているので，この形にできる微分方程式を**変数分離形**といいます。

関数 $x(t)$ についての変数分離形の微分方程式は，一般には

$$g(x)x' = f(t) \tag{8}$$

の形になっています。これを，$x' = \dfrac{dx}{dt}$ として上記のやりかたで変形すると

$$g(x)dx = f(t)dt \tag{9}$$

となり，両辺をそれぞれ積分して

$$\int g(x)dx = \int f(t)dt + C \tag{10}$$

と解くことができます。C は積分定数です。初期値が $x(t_0) = x_0$ である場合は，求められた一般解に $t = t_0, x = x_0$ を代入して C の値を定め，特殊解を求めます。

例題

$x(t)$ の微分方程式

$$9x \cdot x' + 4t = 0 \tag{11}$$

を解いて一般解を求めてください。また，初期値を $x(3) = 2$ とするときの特殊解を求めてください。

（解答）$x' = \dfrac{dx}{dt}$ として変数を分離すると

$$9xdx = -4tdt \tag{12}$$

となり，両辺をそれぞれ積分すると，C_0 を定数として

$$\frac{9}{2}x^2 = -2t^2 + C_0 \tag{13}$$

という一般解が求められます。この解は，

$$\frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = C_1 \tag{14}$$

と書き直すことができます（C_1 は別の定数)。この式は，解が $t - x$ 平面上の楕円群であることを示しています。

また，初期値が $x(3) = 2$ のときは，(14) 式に $t = 3, x = 2$ を代入すると $C_1 = 2$ ですから，特殊解は

$$\frac{t^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 2 \tag{15}$$

となります。■

問題

関数 $x(t)$ に関する次の微分方程式を解いてください。a, b は定数とします。

1. $x' = 3t^2x,\ x(0) = 1$
2. $tx' = ax,\ x(1) = 1$
3. $x' + ax + b = 0,\ x(0) = \dfrac{1-b}{a}\ (a \neq 0)$

付録 1：Lipschitz 条件と，解の一意性の証明[4]

関数 $x(t)$ についての微分方程式 $x' = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$ を考えます。$f(t, x)$ が, $t_0 - a \leqq t \leqq t_0 + a\ (a > 0)$ の範囲で連続で Lipschitz 条件を満たす，すなわち $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqq L|x_1 - x_2|$ を満たす L が存在するとします。このとき，$t_0 - a \leqq t \leqq t_0 + a$ の範囲で初期値を満たす解が一意に存在します[5]。

[4] もっとも簡単な場合の概略を示します。
[5] 解の存在の証明には，もうすこし厳しい条件が必要です。その証明は略します。

（一意性の証明）この方程式に，初期値を x_0 とする 2 つの解があるとし，それぞれ $x = g_1(t), g_1(t_0) = x_0$ と $x = g_2(t), g_2(t_0) = x_0$ とします。このとき，

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= f(t, g_1(t)) \\ g_2'(t) &= f(t, g_2(t)) \end{aligned} \tag{A1}$$

となりますから，Lipschitz 条件 $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqq L|x_1 - x_2|$ より

$$\left| g_1'(t) - g_2'(t) \right| \leqq L \left| g_1(t) - g_2(t) \right| \tag{A2}$$

となり，

$$\left| g_1(t) - g_2(t) \right| \leqq \left| \int_{t_0}^{t} L \left| g_1(t) - g_2(t) \right| dt \right| \tag{A3}$$

となります。右辺の，積分区間が t_0 から t までの積分は，横が積分区間，縦が被積分関数の最大値である長方形の面積以下であるはずです。この長方形の面積は $|t - t_0| \max |g_1(t) - g_2(t)|$ ですから，

$$\left| g_1(t) - g_2(t) \right| \leqq L \left| t - t_0 \right| \max \left| g_1(t) - g_2(t) \right| \tag{A4}$$

となります。さらに，u を積分のための適当な変数とするとき $|t - t_0| \leqq \left| \int_{t_0}^{t} |u - t_0| \, du \right|$ は明らかですから，

$$\begin{aligned} \left| g_1(t) - g_2(t) \right| &\leqq L \left| \int_{t_0}^{t} |u - t_0| \, du \right| \max \left| g_1(t) - g_2(t) \right| \\ &= \frac{L}{2} \left| t - t_0 \right|^2 \max \left| g_1(t) - g_2(t) \right| \end{aligned} \tag{A5}$$

となります。右辺の $|t - t_0|$ にまたこの操作を行い，これを繰り返すと，

$$\left| g_1(t) - g_2(t) \right| \leqq \frac{L}{k!} \left| t - t_0 \right|^k \max \left| g_1(t) - g_2(t) \right| \tag{A6}$$

となり，さらに $t_0 - a \leqq t \leqq t_0 + a \ (a > 0)$ より $|t - t_0| \leqq a$ ですから

$$\left| g_1(t) - g_2(t) \right| \leqq \frac{La^k}{k!} \max \left| g_1(t) - g_2(t) \right| \tag{A7}$$

となります。この関係は $k \to \infty$ でもなりたつはずです。前回（第 4 回）のテキストの例題にあったとおり，$a > 0$ のとき $\lim_{k \to \infty} \frac{a^k}{k!} = 0$ ですから，$g_1(t) = g_2(t)$ となります。

参考文献

E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 6th ed., Wiley, 1988. （現在は 10th ed. が 2011 年 8 月に出ています。ISBN978-0-47045-836-5）
江口他，基礎微分積分学，学術図書，2007. ISBN978-4-87361-695-7
水田義弘，詳解演習 微分積分，サイエンス社，1998. ISBN978-4-78190-891-5